

МАРИНА МУКСУМОВНА ЛЕРИ

кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, преподаватель кафедры теории вероятностей и анализа данных математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
leri@krc.karelia.ru

ЮРИЙ ЛЕОНИДОВИЧ ПАВЛОВ

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории вероятностей и компьютерной статистики, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
pavlov@krc.karelia.ru

ЛЕСНОЙ ПОЖАР НА СЛУЧАЙНОМ ГРАФЕ СО СГОРАЕМЫМИ РЕБРАМИ*

Рассматриваются случайные графы, степени вершин которых имеют степенное распределение. С помощью методов имитационного моделирования решается задача оптимизации топологии графа с точки зрения сохранности наибольшего числа вершин при начинающемся с одной вершины распространении огня по ребрам.

Ключевые слова: случайный граф со степенным распределением, модель лесного пожара, имитационное моделирование

Моделирование лесных пожаров в последнее десятилетие приобрело новое направление и новый смысл. Вопросы ставятся не только о том, какой должна быть стратегия тушения пожара, чтобы сохранить как можно больше лесных насаждений, но и о том, какой должна быть оптимальная топология их расположения. Кроме того, эти модели и полученные с их помощью результаты (см., например, [3], [4], [5], [6]) могут быть использованы и в других областях науки и практики, как, например, они применимы для изучения дефолтов банковских систем [1].

В настоящей работе для рассмотрения одного из аспектов распространения лесного пожара используются модели случайных графов, распределение степеней вершин которых является дискретным аналогом распределения Парето [7], [8], [10]. Естественным образом возникает задача оптимизации числа деревьев и топологии их расположения на определенной (ограниченной) территории, обеспечивающих максимизацию числа несгоревших деревьев в случае возникновения пожара.

Рассматриваются случайные графы с N вершинами, степени которых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, общее распределение которых имеет следующий вид:

$$P\{\xi \geq k\} = k^{-\tau}, k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\tau > 1$ – параметр распределения. При $\tau \in (1, 2]$ распределение (1) имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию,

при $\tau > 2$ дисперсия становится конечной. Для построения графа сначала задаются степени его вершин $1, 2, \dots, N$ как реализации случайной величины ξ . Они определяют различные полуребра графа (полуребром считается ребро, инцидентное некоторой вершине, для которой смежная вершина еще не определена [10]). Ребра образуются посредством равновероятного соединения всех полуребер графа. Сумма степеней вершин может оказаться нечетной, и тогда одно из полуребер графа останется без пары. В этом случае равновероятно выбирается вершина, степень которой увеличивается на 1, тем самым образовав еще одно ребро. Полученный таким образом граф может иметь как петли, так и кратные ребра. Известно, что при $N \rightarrow \infty$ в графах, распределение степеней вершин которых имеет параметр $\tau \in (1, 2)$, асимптотически достоверно образуется гигантская компонента (см. [7], [10]) – связное подмножество вершин графа, математическое ожидание числа вершин которого пропорционально $c \cdot N$, где $0 < c < 1$ – некоторая положительная постоянная. В том случае, когда параметр распределения (1) больше 2, гигантская компонента в графе может отсутствовать.

Пусть вершинам графа соответствуют реальные деревья, и, если между вершинами существует ребро, то в случае возгорания одной из вершин по этому ребру огонь распространяется на смежную вершину. Определим зависимость числа деревьев, растущих на некотором ограниченном пространстве, от параметра τ . Пусть деревья на этой области расположены упорядо-

ченно в виде квадратной решетки размерности 100×100 . Средняя степень вершины i при полном заполнении будет равна 8, в этом случае при возникновении пожара сгорят все деревья. При значениях $i < 8$ (рис. 1) часть вершин и ребер графа будет отсутствовать, поэтому некоторые деревья не сгорают.

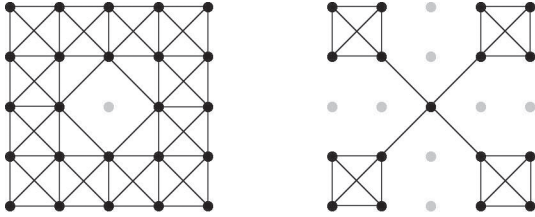


Рис. 1. Топология заполнения решетки при средних степенях вершин графа: $i = 7$ и $i = 4$ соответственно

На рис. 1 отсутствующие вершины обозначены серым цветом.

Исходя из приведенных в таблице данных была получена следующая регрессионная зависимость объема графа N от параметра распределения степеней вершин τ (рис. 2):

$$N = 9256 \cdot \tau^{-1,05}, \quad (2)$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,97$.

Начальные данные для нахождения зависимости N от τ

i	τ	N
1,01	6,75	3350
1,21	2,96	3600
1,33	2,53	3750
1,42	2,32	3900
1,5	2,19	4000
1,6	2,05	4200
2	1,73	5000
2,66	1,49	4780
3	1,42	4489
4	1,29	5578
5	1,23	6700
5,33	1,21	7500
6	1,18	8350
7	1,16	8911
8	1,13	10000

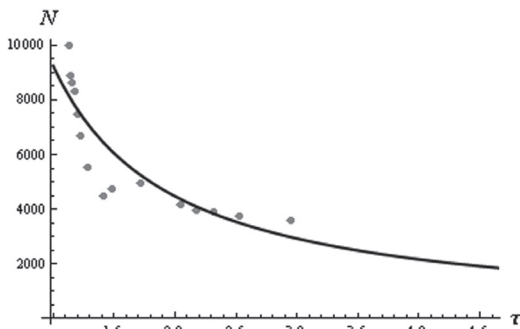


Рис. 2. Регрессионная зависимость N от τ

Применение методов имитационного моделирования в исследованиях случайных графов по-

могает продвинуться в понимании тех аспектов, которые теоретически еще не были изучены. В данной работе была использована имитационная модель случайного графа [2], построенная на основе алгоритма, предложенного в [11], с использованием генератора псевдослучайных чисел «вихрь Мерсенна» [9]. Ранее [2] на этой модели (для $\tau \in (1, 2)$) была исследована зависимость структуры таких графов от параметра распределения степеней вершин τ , а также был проведен анализ устойчивости таких графов внешним воздействиям, таким как направленное и равновероятное удаление вершин.

В данной работе рассматривались два типа возникновения пожара. Во-первых, это «случайное возгорание», когда пожар начинается с равновероятно выбранной вершины, во-вторых, «направленный поджог», при котором первой загорается вершина, имеющая наибольшую степень. Цель работы состояла в том, чтобы определить, при каком значении параметра τ распределения степеней вершин графа достигается максимум числа оставшихся после пожара вершин (деревьев). Моделирование графов и вычислительные эксперименты проводились на вычислительном кластере КарНЦ РАН.

Имитационное моделирование проводилось для значений параметра τ из интервала $(1, 3,5)$ с шагом 0,01. Объемы графов N вычислялись из уравнения (2). Для каждой пары значений N и τ генерировалось по 100 случайных графов. После «возгорания» первой вершины все вершины, связанные с ней, считались сгоревшими, и вычислялось число оставшихся (несгоревших) вершин g графа.

При «случайном возгорании» была получена следующая оценка (график зависимости показан на рис. 3):

$$g = -1476,3 \cdot \tau^2 + 7247,7 \cdot \tau - 5313,4,$$

где коэффициент детерминации модели равен 0,86.

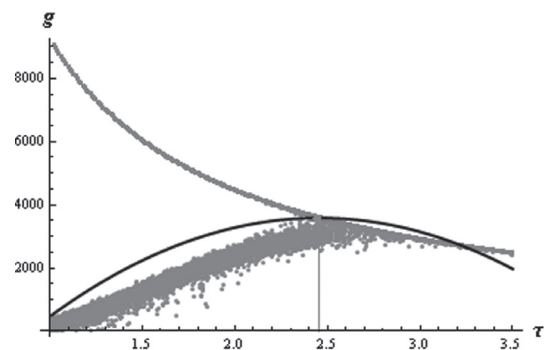


Рис. 3. Регрессионная зависимость числа несгоревших вершин g от параметра τ при «случайном возгорании»

На рис. 3 видно, что при некоторых значениях параметра облако регрессии распадается на 2 части. Это означает, что при одних и тех же значениях τ существует некоторая доля графов, которые

почти не сгорают, то есть после пожара в них остается более 98 % вершин. Такая ситуация возникает тогда, когда возгорание начинается с вершины, являющейся частью очень маленькой компоненты связности (не более 5 вершин), и, следовательно, в графе сгорает только эта компонента.

Таким образом, максимум функции при «случайном возгорании» достигается при значении $\tau = 2,45$ (пример структуры такого графа показан на рис. 4). Начальное число вершин графа N в этом случае в среднем составит около 3600 вершин, из которых примерно 3580 выживут после пожара. Средняя степень вершины такого графа i равна 1,36.

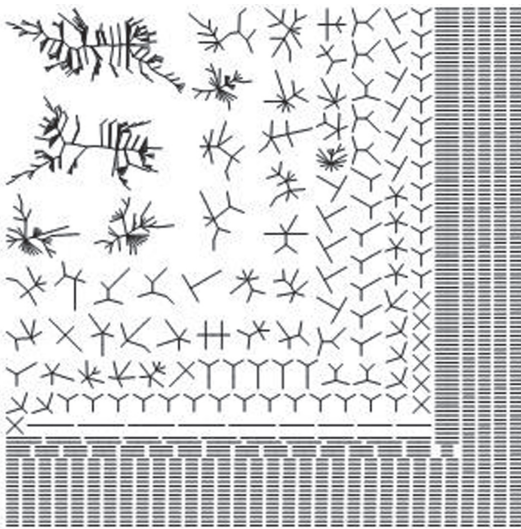


Рис. 4. Пример структуры степенного графа при $\tau = 2,45$

В случае «направленного поджога» была получена следующая зависимость числа несгоревших вершин от параметра τ (рис. 5):

$$g = -1296 \cdot \tau^2 + 7025 \cdot \tau - 6431,$$

коэффициент детерминации модели $R^2 = 0,997$.

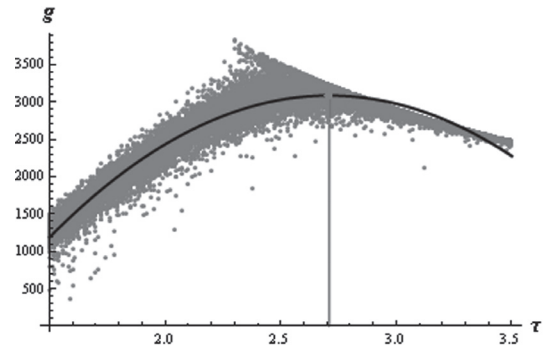


Рис. 5. Регрессионная зависимость числа несгоревших вершин g от параметра τ при «направленном поджоге»

В этих условиях полученная функция достигнет своего максимального значения при $\tau = 2,71$. Тогда N в среднем будет равно 3260 вершин, 3089 из которых останутся после пожара, а средняя степень вершины графа будет равна 1,27.

Таким образом, для того чтобы в случае пожара (как «случайного», так и «направленного») на некоторой заданной территории осталось как можно больше несгоревших деревьев, необходимо, чтобы топология их расположения соответствовала топологии случайного графа с параметром τ распределения степеней вершин (1) от 2,4 до 2,7. Такой граф будет представлять собой многокомпонентную структуру с отсутствием гигантской компоненты связности, средняя степень вершин которой будет колебаться в пределах от 1,2 до 1,4.

Понятно, что предложенный подход к моделированию лесных пожаров не в полной мере адекватен реальности, поскольку распространение огня на соседние деревья зависит от многих факторов и носит случайный характер. Поэтому в следующих наших работах будут рассматриваться ситуации, когда вероятность возгорания ребра меньше единицы.

* Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннаков Б. Б. Банковский кризис и пожары в лесу – Что общего? 2008 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire#more-403
2. Лери М. М. Моделирование случайных графов Интернет-типа // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. Вып. 5. С. 737–744.
3. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. Сгорит ли дерево при пожаре в случайном лесу? // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. Сер. «Математическое моделирование и информационные технологии». 2012. Вып. 3. № 5. С. 89–93.
4. Bertoin J. Burning cars in a parking lot // Commun. Math. Phys. 2011. Vol. 306. P. 261–290.
5. Bertoin J. Fires on trees // Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques. 2012. Vol. 48 (4). P. 909–921.
6. Drossel B., Schwabl F. Self-organized critical forest-fire model // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 1629–1632.
7. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 212 p.
8. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262.
9. Matsumoto M., Nishimura T. Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation. 1998. Vol. 8. № 1. P. 3–30.
10. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23.
11. Tangmunarunkit H., Govindan R., Jamin S. et al. Network topology generators: degree-based vs. structural // Proceedings of the SIGCOMM'02. Pittsburgh, USA. 2002. P. 147–159.

Leri M. M., Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)
Pavlov Yu. L., Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

FOREST FIRE ON RANDOM GRAPH WITH INFLAMMABLE EDGES

Random graphs with vertex degrees drawn independently from a power-law distribution are considered. Using computer simulations, we found an optimal graph topology instrumental in preservation of the maximum number of vertices in case the fire starts from one vertex and spreads along the edges of the graph.

Key words: power-law random graph, forest fire model, simulation modelling

REFERENCES

1. Annakov B. B. *Bankovskiy krisis i pozhary v lesu – Chto obshchego?* 2008 [Bank crisis and forest fires – What’s in common? 2008]. Available at: http://www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire#more-403
2. Leri M. M. Modelling of random graphs of Internet-type [Modelirovanie sluchainykh grafov Internet-tipa]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Surveys in Applied and Industrial Mathematics]. 2009. Vol. 16. Iss. 5. P. 737–744.
3. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. Will a tree will burn in fire in a random forest? [Sgorit li derevo pri pozhare v sluchainom lese?]. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Ser. "Matematicheskoye modelirovanie i informatsionnye tekhnologii"* [Proc. of the Karelian Research Centre of the RAS. Ser. "Mathematical modelling and information technologies"], 2012. Iss. 3. № 5. P. 89–93.
4. Bertoin J. Burning cars in a parking lot // *Commun. Math. Phys.* 2011. Vol. 306. P. 261–290.
5. Bertoin J. Fires on trees // *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques.* 2012. Vol. 48 (4). P. 909–921.
6. Drossel B., Schwabl F. Self-organized critical forest-fire model // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69. P. 1629–1632.
7. Durrett R. *Random Graph Dynamics.* Cambridge, Cambridge University Press, 2007. 212 p.
8. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology // *Computer Communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262.
9. Matsumoto M., Nishimura T. Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator // *ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation.* 1998. Vol. 8. № 1. P. 3–30.
10. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55. P. 3–23.
11. Tangmunarunkit H., Govindan R., Jamin S. et al. Network topology generators: degree-based vs. structural // *Proceedings of the SIGCOMM'02.* Pittsburgh, USA. 2002. P. 147–159.

Поступила в редакцию 20.02.2013