

**РОМАН ВЛАДИМИРОВИЧ ВОРОНОВ**

кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и кибернетики математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)  
*rvoronov@karelia.ru*

**ДМИТРИЙ ПЕТРОВИЧ КОСИЦЫН**

кандидат технических наук, заместитель директора ООО «Опти-Софт» (Петрозаводск, Российская Федерация)  
*kositsyn@psu.karelia.ru*

**АНТОН ИГОРЕВИЧ ШАБАЕВ**

кандидат технических наук, директор ООО «Опти-Софт» (Петрозаводск, Российская Федерация)  
*ashabaev@petrsu.ru*

**АННА МИХАЙЛОВНА ВОРОНОВА**

преподаватель кафедры прикладной математики и кибернетики математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)  
*voronova\_am@petrsu.ru*

**ЛЮДМИЛА ВЛАДИМИРОВНА ЩЕГОЛЕВА**

доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и кибернетики математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)  
*schegoleva@psu.karelia.ru*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ МНОГОПЕРЕДЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА В ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОМ КОМПЛЕКСЕ\***

Представлена математическая модель планирования процессов лесозаготовок, транспортных перевозок лесоматериалов и распределения технологических операций между предприятиями в составе лесопромышленного холдинга. Модель охватывает лесозаготовительные предприятия и базы холдинга, лесоперерабатывающие предприятия, а также заказчиков продукции. В качестве целевой функции выбрана сумма складских издержек и затрат на перевозки. Отличительной особенностью модели является учет дискретности цикла производства и запаздывания транспортно-производственных процессов. Модель использована при создании автоматизированной системы оптимального планирования «Лесопереработка», предназначенной для оптимального планирования и управления сквозными процессами использования древесины.

Ключевые слова: сквозные процессы лесопереработки, многопередельное производство, оптимальное планирование производства, лесозаготовительные предприятия, лесоперерабатывающие предприятия

Интегрированные структуры в лесопромышленном производстве составляют основу лесопромышленного комплекса России [3], [5], [6]. Как правило, такие структуры охватывают несколько взаимосвязанных производств по заготовке, обработке и переработке лесоматериалов, их предприятия расположены в нескольких регионах. Поэтому эффективное управление такой структурой на уровне согласования технологических цепочек многопередельных производств является одной из востребованных задач. Одним из подходов к ее решению является ее формулировка в виде оптимизационной задачи из класса сетевых транспортных задач.

Ранее были предложены математические модели, охватывающие взаимосвязанные группы производств лесопромышленного комплекса

[1], [6], включая класс математических моделей для решения задач планирования и управления материальными потоками, названный классом многоэтапных транспортно-производственных задач. В данной статье предлагается развитие этих моделей путем предположения о дискретности цикла производства и включения в рассмотрение динамических характеристик модели, таких как инерционность и запаздывание транспортно-производственных процессов. Основное внимание уделено важному частному случаю – транспортировке древесины от лесозаготовительных предприятий к лесоперерабатывающим.

Важной задачей лесопромышленного холдинга является выполнение полученных заказов на поставку готовой продукции на разных уровнях передела лесных ресурсов с минимальными затра-

тами. Одним из основных путей снижения затрат является оптимизация транспортных перевозок.

Рассмотрим постановку задачи более подробно. Интегрированная структура включает лесозаготовительные предприятия (ЛЗП), лесозаготовительные базы (ЛЗБ), лесоперерабатывающие предприятия (ЛПП), расположенные в пределах одного лесопромышленного региона. Как правило, в регионе присутствуют ЛЗП и ЛПП, не относящиеся к этой интегрированной структуре. Для каждого ЛЗП установлены предельные нормы лесозаготовки каждого вида древесного сырья по каждой технологии.

ЛПП для производства продукции используют определенные виды древесного сырья, которым их обеспечивают ЛЗП. Предполагается, что на вход технологической операции может поступить только один вид сырья. В качестве производимой продукции может выступать как конечный потребительский товар, так и необработанные лесоматериалы – сырье для деревообрабатывающей и других отраслей промышленности, в том числе за пределами региона. Перерабатывающие предприятия интегрированной структуры в соответствии с имеющимися технологическими возможностями и ограничениями, а также ориентируясь на спрос и цены выпускаемой продукции, осуществляют закупку древесного сырья, заготовленного в ЛЗП. Некоторые ЛЗП могут выполнять переработку своей древесины.

При организации заготовок и поставок сырья из каждого ЛЗП на перерабатывающие предприятия решается вопрос выбора оптимального объема заготовок по каждому виду технологии, а также выбора оптимальной структуры поставок с учетом возможных способов и расстояний транспортировки, портфеля заказов на продукцию перерабатывающих предприятий.

Перейдем к постановке математической модели задачи. Введем в рассмотрение индексные множества:  $M$  – множество хозяйствующих субъектов, включая лесозаготовительные предприятия, лесозаготовительные базы, лесоперерабатывающие предприятия и заказчиков продукции;  $M_1$  – множество ЛЗП,  $M_1 \subset M$ ;  $M_2$  – множество предприятий (ЛЗП, ЛЗБ, ЛПП),  $M_1 \subset M_2 \subset M$ ;  $M_3$  – множество заказчиков,  $M_3 \subset M$ ;  $K$  – множество видов продукции (включая древесное сырье разного вида и с различной породно-возрастной структурой, промежуточную и конечную продукцию);  $K_0$  – множество видов лесосырья,  $K_0 \subset K$ ;  $Q$  – множество типов транспортных средств (ТС), число ТС каждого типа считается неограниченным;  $N$  – множество технологических операций ЛПП.

Пусть весь период планирования разделен на  $T$  дискретных интервалов времени  $t = 1, \dots, T$ . Для каждого ЛЗП  $i \in M_1$  заданы:  $V_{it}$  – технологически максимально возможный объем заготовки лесосырья в интервал времени  $t = 1, \dots, T$ ;  $D_{ik}$  – запас лесосырья вида  $k \in K_0$ ;  $L_{ik}$  – множест-

во интервалов времени, когда имеется возможность заготовки лесосырья вида  $k \in K_0$ .

Для каждого предприятия  $i \in M_2$  заданы:  $K_i$  – множество видов продукции, производство которых возможно на предприятии;  $N_i$  – множество поддерживаемых технологических операций;  $W_{ij}$  – максимально возможный объем сырья для выполнения технологической операции  $j \in N_i$  в один интервал времени планирования (на практике пропорционально времени применения операции);  $b_{ik}$  – максимально возможный объем продукции  $k \in K$ , хранящейся на складе;  $c_{ik}$  – затраты на хранение единицы объема продукции  $k \in K$  на складе.

Для каждого заказчика  $i \in M_3$  заданы:  $k(i) \in K$  – вид продукции (предполагается, что заказывается один вид продукции);  $U_i$  – объем заказа;  $\theta_i$  – крайний срок выполнения заказа.

На вход каждой технологической операции поступает сырье одного заданного вида, на выходе – продукция нескольких видов в заданных пропорциях. Для каждого вида продукции  $k \in K$  задано:  $N_k$  – множество технологических операций, входным сырьем которых служит продукция  $k$ . Для каждой технологической операции  $j \in N$  заданы:

- коэффициент выхода  $\alpha_{jk_2}$  продукции вида  $k_2 \in K$  при использовании сырья  $k_1 \in K$  (в границах от 0 до 1);
- время  $\tau(j)$  выполнения операции.

Если операция  $j$  начинается в интервал времени  $t$ , то заканчивается в интервал времени  $t + \tau(j)$ . Время  $\tau(j)$  выполнения операции  $j$  может быть равно нулю. Это означает, что полученная продукция в тот же интервал времени может быть подана на вход какой-нибудь другой операции.

Обозначим  $K_q$  – множество видов продукции, перевозимых при помощи ТС вида  $q \in Q$ . Семейство подмножеств  $K_q$  образует разбиение множества  $K$ . Дополнительные обозначения:  $c_{ijq}$  – затраты на поставку единицы продукции транспортным средством вида  $q \in Q$  с предприятия  $i \in M_2$  на предприятие или заказчику  $j \in M$ ;  $\tau_{ijk}$  – время на поставку единицы продукции  $k \in K_i$  с предприятия  $i \in M_2$  на предприятие или заказчику  $j \in M$ ;  $d_{iqk}$  – ограничение на объем поставки продукции транспортным средством вида  $q \in Q$  с предприятия  $i \in M_2$  в интервал времени  $t$ .

Неизвестные задачи:  $x_{ikt}$  – объем заготовки лесосырья вида  $k \in K_0$  в интервал времени  $t$  на ЛЗП  $i \in M_1$ ;  $\hat{y}_{ijkt}$  – объем продукции вида  $k \in K_i$ , производимой на предприятии  $i \in M_2$  в интервал времени  $t$  при выполнении технологической операции  $j \in N_i$ ;  $\tilde{y}_{ijkt}$  – объем продукции вида  $k \in K_i$ , служащей сырьем для выполнения технологической операции  $j \in N_i$  на предприятии  $i \in M_2$  в интервал времени  $t$ ;  $z_{ikt}$  – объем лесосырья или продукции вида  $k \in K$  в интервал времени  $t$ , хранящегося на складе предприятия  $i \in M_2$ ;  $u_{ijkt}$  – объем отправки продукции  $k \in K_i$  с предприятия

$i \in M_2$  на предприятие или заказчику  $j \in M_3$  в интервал времени  $t$ .

Введем следующие ограничения.

Технологическое ограничение на объем заготовки лесосырья в каждый момент времени:

$$\sum_{k \in K_0} x_{ikt} \leq V_{it}, i \in M_1, t \in L_{ik}.$$

На каждом ЛЗП объем заготовки каждого вида лесосырья не может превышать имеющийся запас:

$$\sum_{t \in L_{ik}} x_{ikt} \leq D_{ik}, i \in M_1, k \in K_0.$$

Технологическое ограничение на объем переработки по каждой операции на предприятиях:

$$\sum_{k \in K_i} \tilde{y}_{ijkt} \leq W_{ij}, i \in M_2, j \in N_i, t = 1, \dots, T.$$

На каждом предприятии в любой интервал времени объем хранящегося на складе лесосырья или продукции ограничен сверху:

$$z_{ikt} \leq b_{ik}, i \in M_2, k \in K, t = 1, \dots, T.$$

Уравнение баланса между расходами сырья и выходом продукции:

$$\hat{y}_{ijk_2t+\tau(j)} = \alpha_{jk_1k_2} \tilde{y}_{ijk_1t}, i \in M_2, j \in N_i, k_1, k_2 \in K, t = 1, \dots, T.$$

Условия баланса для склада ЛЗП:

$$z_{ikt} = z_{ikt-1} + x_{ikt} - \sum_{j \in N_i} \tilde{y}_{ijkt} - \sum_{i' \in M} u_{ii'kt}, \\ i \in M_1, k \in K_0, t \in L_{ik}.$$

Условия баланса для склада предприятий (кроме ЛЗП):

$$z_{ikt} = z_{ikt-1} + \sum_{j \in N_i} \hat{y}_{ijkt} - \sum_{j \in N_i} \tilde{y}_{ijkt} + \sum_{i' \in M_2} u_{i'ikt-\tau_{i'ik}} - \sum_{i' \in M} u_{ii'kt}, \\ i \in M_2 \setminus M_1, k \in K \setminus K_0, t = 1, \dots, T.$$

Начальные условия для склада всех предприятий:

$$z_{ik0} = 0, i \in M_2, k \in K.$$

Ограничение на объемы поставки продукции в разные интервалы времени:

$$\sum_{k \in K_q} \sum_{i' \in M} u_{ii'kt} \leq d_{iqt}, i \in M_2, q \in Q, t = 1, \dots, T.$$

Все заказы должны быть выполнены в срок и в полном объеме:

$$\sum_{t=1}^{\theta_i} \sum_{i' \in M_2} u_{i'ik(i)t-\tau_{i'ik}} = U_i, i \in M_3.$$

Условия неотрицательности:

$$x_{ikt} \geq 0, i \in M_1, k \in K_0, t = 1, \dots, T,$$

$$\hat{y}_{ijkt} \geq 0, i \in M_2, j \in N_i, k \in K_i, t = 1, \dots, T,$$

$$\tilde{y}_{ijkt} \geq 0, i \in M_2, j \in N_i, k \in K, t = 1, \dots, T,$$

$$z_{ikt} \geq 0, i \in M_2, k \in K, t = 1, \dots, T,$$

$$u_{ii'kt} \geq 0, i \in M_2, i' \in M, k \in K_i, t = 1, \dots, T.$$

Целевая функция – сумма складских издержек и затрат на перевозки:

$$\sum_{i \in M_2} \sum_{k \in K_i} c_{ik} \sum_{t=1}^T z_{ikt} + \sum_{i \in M_2} \sum_{i' \in M} \sum_{q \in Q} c_{ii'q} \sum_{k \in K_q} \sum_{t=1}^T u_{ii'kt} \rightarrow \min.$$

Для экспериментальных исследований в качестве лесопромышленного региона была выбрана Республика Карелия, а в качестве интегрированной структуры – группа компаний ЗАО «Соломенский лесозавод» (<http://solomenskiy.ru/>), включающая два ЛЗП и одно ЛПП. Число отечественных и зарубежных потребителей продукции – более 100. Перевалочные базы сырья отсутствуют.

На ЛЗП применяются 2 технологии заготовки и производится 210 видов лесопродукции (ель и сосна, по каждой породе – 15 сортiroвочных групп и 7 видов длин). ЛПП производит около 1400 видов продукции (3–8 сортов по каждому из более 250 видов сечений пиломатериалов).

Производственные операции содержат 5 основных переделов (лесопиление, пакетoформирование, сушка, торцовка, строжка). Все перевозки осуществляются двумя типами транспортных средств, имеющихся в достаточном количестве. Горизонт оперативного планирования составляет один месяц, долгосрочного – один год.

При этих условиях задача имеет  $10^6$  переменных и  $10^3$  ограничений. Для ее решения были использованы практики нахождения решения таких задач [2] и использован специализированный модуль UPS.Solver («универсальный решатель») [4], предназначенный для решения сложных оптимизационных задач планирования производством с большим количеством ограничений. В основу модуля положены методы решения задач линейной оптимизации для оптимизационных задач специальной структуры с использованием метода декомпозиции задач линейного программирования Данцига – Вулфа. Матрица ограничений задачи строится с помощью специализированного механизма «Матричный конструктор», позволяющего по данным ограничениям задачи конструировать матрицы специальной блочной структуры.

Полученный оптимальный план включает около 800 значений переменных, определяющих объемы перевозок промежуточной и конечной продукции различного вида.

На практике определение значений параметров объемов и периодов времени возможной заготовки лесосырья представляет собой дополнительную задачу ввиду существенно-го влияния случайных факторов (надежность заготовительного оборудования, персонала, транспорта и др.), которая, как правило, решается путем использования ряда допущений на основе статистики прошлых периодов и опыта технологов.

Представленная математическая модель была использована при создании автоматизированной системы оптимального планирования (АСОП) «Лесопереработка» для оптимального планирования и управления сквозными процессами

использования древесины. АСОП «Лесопереработка» может быть использована при планировании производства действующих лесопромышленных предприятий, технологии производства и потребления которых заданы. Также возможно ее использование в планировании новых или реконструкции имеющихся предприятий для

моделирования вариантов структуры заготовки сырья, размещения предприятий и распределения видов технологических операций между ними. При этом, возможно, потребуется изменение целевой функции для учета вложенных инвестиций, дисконтированных затрат и прогнозируемых цен на сырье и продукцию.

\* Работа выполняется при финансовой поддержке госконтракта № 14.514.11.4004 Министерства образования и науки Российской Федерации, а также Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин А. В., Кузнецов В. А., Шегельман И. Р., Щеголева Л. В. Теория и практика принятия оптимальных решений для предприятий лесопромышленного комплекса. Петрозаводск: Изд. ПетрГУ, 2008. 219 с.
2. Воронин А. В., Шабает А. И., Печников А. А. Конвейерная технология разработки программного обеспечения для управления производственными ресурсами и процессами // Перспективы науки. 2010. Т. 4. С. 95–99.
3. Воронин А. В., Шегельман И. Р. Лесопромышленная интеграция: теория и практика. Петрозаводск: Изд. ПетрГУ, 2009. 464 с.
4. Кузнецов В. А., Воронин А. В., Шабает А. И., Косицын Д. П. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в ФИПС № 2010617003 «Комплекс алгоритмов и программных модулей для решения прикладных задач оптимизации производственных процессов, использующих операции раскроя, комплектровки и транспортировки материалов». Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 19.10.2010.
5. Соколов А. П., Герасимов Ю. Ю. Методика принятия решений по оптимизации лесозаготовительных планов // Научный журнал КубГАУ. 2011. № 69 (05). С. 174–188.
6. Щеголева Л. В. Процесс лесопромышленного производства с использованием вторичных ресурсов биомассы дерева // Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2007. № 1. С. 152–156.

Voronov R. V., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)  
 Kositsyn D. P., L. L. C “Opti-Soft” (Petrozavodsk, Russian Federation)  
 Shabaev A. I., L. L. C “Opti-Soft” (Petrozavodsk, Russian Federation)  
 Voronova A. M., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)  
 Shchegoleva L. V., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

#### MATHEMATICAL MODEL FOR MULTISTAGE PRODUCTION PLANNING IN FOREST INDUSTRY COMPLEX

The article presents mathematical model of the timber logging process planning and transportation, as well as distribution of technological operations among enterprises within one forest industry holding. The model incorporates logging enterprises and bases of the holding, its processing enterprises and product customers. The target function of the model is to assess warehouse storage and transportation expenses. A distinctive feature of the model is its ability to account for discrete nature of production processes, for time delays in transportation and production processes. The model is used to develop the software system “Wood processing” for optimal planning of end-to-end wood utilization processes. The model can be used for planning new enterprises and renovation of existing ones by modeling various options of the wood logging structure; allocation of enterprises and distribution of technological operations among them.

Key words: end-to-end wood utilization processes, multi-stage, optimal production planning, logging enterprises, wood processing enterprises

#### REFERENCES

1. Voronin A. V., Kuznetsov V. A., Shegel'man I. R., Shchegoleva L. V. The Theory and Practice of Optimal Solutions for the Forest Industry Enterprises [Teoriya i praktika prinyatiya optimal'nykh resheniy dlya predpriyatiy lesopromyshlennogo kompleksa]. Petrozavodsk, PetrSU Publ., 2008. 219 p.
2. Voronin A. V., Shabaev A. I., Pechnikov A. A. Conveyor Software Development Technology for Managing Manufacturing Resources and Processes [Konveyernaya tekhnologiya razrabotki programmogo obespecheniya dlya upravleniya proizvodstvennymi resursami i protsessami]. Perspektivy nauki. 2010. Vol. 4. P. 95–99.
3. Voronin A. V., Shegel'man I. R. Forestry Industry Integration: Theory and Practice [Lesopromyshlennaya integratsiya: teoriya i praktika]. Petrozavodsk, PetrSU Publ., 2009. 464 p.
4. Gerasimov Yu. Yu., Sokolov A. P. Geographic Information System Solutions for Optimization Problem of Transport Logistics for Round Timber [Geoinformatsionnaya sistema dlya resheniya optimizatsionnoy zadachi transportnoy logistiki kruglykh lesomaterialov]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy “Lesnoy zhurnal”. 2009. № 3. P. 78–85.
5. Sokolov A. P., Gerasimov Yu. Yu. Technique of Decision-making to Optimize Harvesting Plans [Metodika prinyatiya resheniy po optimizatsii lesozagotovitel'nykh planov]. Nauchnyy zhurnal KubGAU. 2011. № 69 (05). S. 174–188.
6. Shchegoleva L. V. The Process of Timber Production with the Use of Secondary Resources of Tree Biomass [Protsess lesopromyshlennogo proizvodstva s ispol'zovaniem vtorichnykh resursov biomassy dereva]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy “Lesnoy zhurnal”. 2007. № 1. P. 152–156.

Поступила в редакцию 22.04.2013