Ноябрь, № 7. Т. 1 **Философия** **2013**

УДК 165.0

ИЛЬЯ ЭДУАРДОВИЧ ЕГОРЫЧЕВ
кандидат философских наук, старший преподаватель кафедры культурологии, Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Российская Федерация)
ricci_flow@inbox.ru

НЕПОЛНОТА АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ КАК ИСТИНА РЕАЛЬНОСТИ

Полнота аксиоматических теорий является желаемым свойством для целей теории познания, хотя она одновременно указывает на их относительную эпистемологическую «бедность». Рассматриваются отдельные этапы истории развития формально-логического аппарата, исследуется общая структура аксиоматических теорий, анализируются границы аксиоматизации пропозициональной логики и арифметики. Прослеживается возможная связь теорем о неполноте Курта Гёделя с теорией субъекта. Методология следует идеям современного французского философа Алена Бадью, у которого сугубо математические результаты не являются случайными, но непосредственно указывают на онтологическую структуру реальности.

Ключевые слова: доказательство, модель, непротиворечивость, полнота, истина, субъект, бесконечность

Непротиворечивостью называют свойство формальной системы, заключающееся в невозможности одновременного вывода в ней некоторого утверждения и его отрицания. В противоречивой теории доказуемо любое суждение, как истинное, так и ложное, поэтому говорят, что в такой теории «доказывается слишком многое» или что «из лжи следует все, что угодно». Отсюда вытекает еще один способ определить непротиворечивость – показать, что в теории выводимо не все.

Традиционная вера в непротиворечивость аксиом евклидовой геометрии основывалась на их истинности: коль скоро противоречащие друг другу утверждения не могут быть одновременно истинными, то верно и обратное: если аксиомы геометрии истинны, то они взаимно непротиворечивы[1]. Но что в таком случае можно сказать о неевклидовых геометриях? Являются ли они непротиворечивыми? Доказательство невыводимости пятого постулата из остальных позволяло заменить его на противоречащее ему суждение и получить эквивалентную систему аксиом. Но на интуитивном уровне они не соответствовали сложившимся представлениям о пространстве, и было сомнительно, чтобы они были истинами о чем-нибудь вообще. Такая постановка вопроса привела к возникновению важной идеи: если бы удалось найти «модель» (или, как еще говорят, интерпретацию) для абстрактного набора аксиом, в которой бы они все одновременно выполнялись, то тем самым каждая аксиома превратилась бы в истинное высказывание о данной модели. В случае с евклидовой геометрией такой моделью считалось обычное пространство. Но аксиоматические теории обладают еще и тем важным свойством, что значения терминов теории определяются структурой вхождения их в список аксиом, и ничем более. Устоявшиеся значения, связанные с тем или иным термином, безусловно, играют большую роль в понимании нами теорем – мы осознаем взаимосвязь между терминами во многом благодаря тому, что имеем дело со знакомыми словами, и именно эта интуитивно осознаваемая взаимосвязь мотивирует нас к формулировке тех или иных проблем, и тем не менее все, что не оговорено таким сугубо формальным «словоупотреблением», нерелевантно в отношении выводимых в теории следствий. Это позволяет проинтерпретировать двумерный случай эллиптической геометрии следующим образом: под тем, что в ее аксиомах называется «плоскостью», мы будем понимать поверхность, соответствующую обыкновенной евклидовой сфере. «Точкой» назовем пару противоположных точек на сфере, а «прямой линией» – окружность большого круга, также лежащую на сфере. Таким образом, каждый постулат эллиптической геометрии плоскости преобразуется в теорему евклидовой геометрии пространства. Например, тот же пятый постулат в его эллиптической версии приобретет вид: через точку на сфере невозможно провести окружность большого круга, параллельную данной. Продолжая действовать подобным образом, мы придем к заключению, что все постулаты в нашей модели выполняются и, значит, непротиворечивость эллиптической геометрии доказана. Существенным недостатком такого метода является то, что непротиворечивость одной теории доказывается в предположении непротиворечивости другой – в нашем примере это евклидова геометрия. То есть проблема, строго говоря, не решается окончательно, а перемещается в другую область. А дотошным математикам всегда хочется иметь абсолютное доказательство чего бы то ни было. Альтернативный путь, по которому имело бы смысл пойти, был предложен Дэвидом Гильбертом. Рассмотрим его подробнее.

Прежде всего требуется полная формализация аксиоматической теории. Это достигается заданием алфавита теории, ее синтаксиса (строчку, удовлетворяющую заданным правилам грамматики, называют формулой теории) и конечного набора правил, по которым разрешено из формул теории образовывать другие формулы. При этом образованные «выражения» оказываются освобождены вообще от всякого смысла. Требуется рассматривать их просто как «строчки» конечной длины, состоящие из ничего не значащих и строго предписанных алфавитом «пустых» символов. Вывод теорем в такой теории – это всего лишь преобразование некоторого множества строчек, которое было нами по каким-то причинам выделено в качестве аксиом теории, в другое множество строчек. При этом нам может казаться, что символы таким образом формализованного «исчисления» все же имеют значения, а принятые в нем правила переставляют эти символы так, что те ведут себя в точности так же, как должны были бы вести себя символы с приписываемыми нами им значениями, но их «поведение» ни в коем случае не определяется этими значениями, а наоборот, возникающая иллюзия значения есть следствие производимых над ними действий.

Результатом такого выхолащивания смысла является полностью прозрачная структура многообразных отношений между элементами системы, которую мы вполне можем описывать содержательно. Например, мы можем заметить, что некоторая «строчка» является симметричной, или составлена из трех элементарных символов, или первые два символа в ней совпадают с первыми двумя символами другой строчки и т. д. Такие утверждения о бессмысленных строчках теории являются уже, во-первых, вполне осмысленными, а во-вторых, не принадлежат теории – это так называемые предложения метаязыка. И вот оказывается, что описанный нами метатеоретический взгляд на теорию дает возможность установить «абсолютно», без отсылки к другим теориям, противоречив ли набор аксиом, составляющих теорию, а также является ли всякая тавтология, выражаемая средствами языка теории, выводимой в этой теории теоремой. В тех случаях, когда удается доказать и второе свойство, говорят, что данная система не только непротиворечива, но и *полна*.

Если система противоречива, то в ней выводима любая формула (любая формула является теоремой). Но верно и обратное: если существует по крайней мере одна формула, не являющаяся теоремой системы (не выводима из ее аксиом), то такая система непротиворечива. Таким образом, задача теперь сводится к отысканию некоторой особенности в формальной структуре формул системы, которая будет удовлетворять следующим условиям: 1) данной особенностью должны обладать строчки системы, выбранные в качестве аксиом; 2) особенность должна быть «наследуемой»: ею должны обладать все строчки системы, полученные из аксиом по правилам вывода; 3) не все строчки системы, построенные по правилам синтаксиса, обладают данной особенностью.

Если мы укажем хотя бы одну формулу (правильно построенную строчку), которая не обладает такой особенностью, мы докажем непротиворечивость нашей системы, причем докажем «абсолютно». Здесь мы рассуждаем следующим образом: наследуемое свойство передается от аксиом всем теоремам. Но если какая-то формула системы тем не менее не обладает указанным свойством, то эта формула не может быть теоремой, то есть она не выводима в теории, а это и есть, как мы показали, критерий непротиворечивости теории.

Это может показаться удивительным, но свойство «быть тавтологией» удовлетворяет всем перечисленным условиям. Дело в том, что тавтологию можно определить и как такую строчку системы исчисления высказываний, которая обладает некоторым чисто структурным свойством, выделяющим ее таким образом в непересекающийся с другими класс. Используя это, удается показать, что из аксиом теории по разрешенным в ней правилам можно получать формулы вполне определенной структуры – тавтологии. И только полная формализация системы позволила, таким образом, получить столь нетривиальный и глубокий результат[2].

Итак, любая теорема классической системы исчисления высказываний является тождественно-истинной формулой. Но верно ли, что всякая тождественно-истинная формула, выражаемая на языке пропозициональной логики, доказуема, т. е. является теоремой? Или, как говорят математики, является ли классическое исчисление высказываний полным? Ответ на этот вопрос также является утвердительным[3]. Это значит, что аксиом классического пропозиционального исчисления *достаточно* для того, чтобы произвести на свет *все* логические истины, которые можно сформулировать на языке этой формальной теории. Другими словами, все, о чем можно сказать на языке теории, в ней же и доказуемо [7].

Однако пропозициональным исчислением формализуется лишь незначительная часть логики, а его языка и дедуктивного аппарата недостаточно даже для того, чтобы заниматься элементарной арифметикой. И тем не менее до недавнего времени ученые пребывали в уверенности, что в любой области математики могут быть построены формализованные системы, в которых доказываются все истины данной области. Очевидно, что Евклид таким образом подбирал свои постулаты, чтобы из них можно было вывести абсолютно все истины геометрии, а математики еще совсем недавно верили, что аксиоматизированная теория чисел также является полной или в худшем случае может быть дополнена каким-то конечным набором аксиом. Вышедшая в свет в 1931 году работа Курта Гёделя с красноречивым названием "Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme"[4] положила конец всяким надеждам на осуществимость подобных намерений. Доказанные им в этой работе теоремы о неполноте утверждали, что всякая достаточно мощная непротиворечивая формальная теория (то есть такая, в которой по крайней мере аксиоматизируется вся арифметика) необходимо содержит бесконечное число истинных высказываний, недоказуемых средствами самой теории. Более того, такая неполнота является критерием непротиворечивости! А любые попытки дополнить систему новыми аксиомами и более мощными правилами вывода обречены на неудачу, поскольку расширенная система будет обладать точно такими же дефектами. То есть даже если удастся внести в систему изменения, которые позволят доказать какое-то конкретное утверждение, недоказуемое в исходной системе, непротиворечивость и логическая состоятельность примененных правил рассуждения снова с необходимостью окажутся под вопросом.

Доказательство Гёделя существенным образом опиралось на такое свойство «достаточно мощных» систем, как способность высказываться о себе самих, то есть на своего рода «способности» системы к «рефлексии». Гениальная «геделева нумерация» позволила ему сделать *суждения о системе суждениями системы*! Поясним сказанное: высказывания теории чисел – это высказывания о целых числах, образуемых ими множествах и их свойствах, таких как делимость, порядковый тип и пр. Суждения же о том, что некоторая теорема есть строчка конечной длины или начинается с отрицания, относятся к так называемому метаязыку и к числам отношения не имеют. Мы уже пользовались таким взглядом на формальную теорию, когда говорили об «абсолютных» доказательствах, и сейчас это свойство выступает еще более наглядно. Гёделю удалось так занумеровать все возможные суждения о теории чисел, что средствами самой теории оказалось возможным показать: числа с определенными ограничениями на структуру не могут находиться в определенных отношениях с другими числами. А поскольку каждому числу соответствовало некоторое метавысказывание, то Гёдель совершенно строго доказал, что «суждение за номером G недоказуемо в теории чисел» имеет именно этот номер G. То есть оно недоказуемо именно потому, что истинно! И более того, если бы оно было доказуемо, то это одновременно указывало бы и на противоречивость теории, поскольку в ней доказывалась бы ложь![5]

Этот поначалу казавшийся сугубо техническим результат имеет поистине фундаментальное философское значение и касается непосредственным образом как границ онтологии, так и теории Субъекта, поскольку человек вне всякого сомнения – «достаточно мощная система» для того, чтобы высказываться о себе самом. Поэтому полнота аксиоматических теорий одновременно указывает и на их относительную эпистемологическую «бедность» – язык пропозиционального исчисления, дополненный всего лишь двумя кванторами и пятью аксиомами арифметики, уже существенным образом неполон. Заметим, что язык самой формальной логики с кванторами всеобщности и существования, без специальных аксиом (такие теории называются исчислением предикатов первого порядка), тем не менее является полным, что было доказано все тем же Гёделем несколькими годами раньше. Полнота же и непротиворечивость богатых содержательных теорий, как правило, доказываются в предположении непротиворечивости других, заведомо неполных, но более мощных теорий, логическая состоятельность которых остается объектом своего рода научной интуиции или веры.

Очень любопытную, подлинно философскую работу в этом смысле проделывает современный французский философ Ален Бадью [1], [3]. Бадью совершенно справедливо замечает, что еще во времена Гегеля бесконечность, строго говоря, не была известна. Точнее, существовало осознание того, что к любому числу можно прибавить еще одно и что такая процедура не останавливается, но это по сути была, как называл ее Гегель, «дурная», или «скучная», бесконечность [1; 164]. И несмотря на то что в «Науке логики» есть довольно глубокие интуиции на сей счет, Бадью настаивает, что подлинную бесконечность открыл для нас лишь Георг Кантор [4]. И действительно, во всей своей необозримости мир множеств раскрылся перед нами только после того, как Кантор доказал существование сколь угодно больших мощностей[5]. Его идея взаимно-однозначного соответствия впервые позволила строго мыслить и сравнивать бесконечные количества, ставя их во взаимно-однозначное соответствие со множеством натуральных чисел, мощность которого стала называться счетной. Но эта была та самая «дурная» бесконечность Гегеля, и первый удивительный результат Кантора состоял в том, что в математическом мире обнаружились совокупности, которые во взаимно-однозначное соответствие с натуральными числами поставить нельзя. Как вообще возможен такой объект? Среди важных результатов «наивной» теории множеств[6] был и такой: множество подмножеств любого непустого множества имеет мощность бóльшую, чем исходное множество. Но чтобы из какого-то множества начать что-то строить, неплохо бы его уже иметь. Если в случае конечных совокупностей все болеее или менее очевидно, то вопрос о том, что такое множество подмножеств, скажем, множества натуральных чисел, уже понятно далеко не каждому… И это ровно то, на что обращает наше внимание Бадью: до Кантора мы привыкли обходиться интуицией бесконечного, сводящейся к прибавлению «еще одного», «и так далее», но таким образом мы всякий раз будем иметь что-то конечное, это в лучшем случае так называемая потенциальная бесконечность. Существование же бесконечности как актуально построенного множества целиком зависит от наших «амбиций». Давайте вдумаемся в эту мысль: в мире постулируется некое «количество», радикальное «Иное», к которому не подобраться операцией бесконечного прибавления единицы! То есть это уже даже не онтологический вопрос, а этический, если не сказать – религиозный, поскольку здесь решается, в каком мире нам предстоит отныне жить.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Истинность логической эквиваленции вида $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$, вообще говоря, не является очевидной и должна доказываться. Доказательство, как правило, проводится от противного и опирается на тот факт, что импликация ложна в том и только том случае, когда ее антецедент истинен, а консеквент ложен.

[2] Следует отметить, что до недавнего времени «абсолютные» доказательства использовали математическую индукцию, т. е. аксиому теории чисел. Первое неиндуктивное доказательство было получено лишь в 2004 году. Подробнее см. [8].

[3] Этот чрезвычайно значимый результат впервые был получен Эмилем Постом. Несмотря на то что его подробная демонстрация выходит за рамки данной статьи, доказательство Поста удивительно изящно. Частично схема доказательства приводится в [7] , но мы также настоятельно рекомендуем обратиться к [6], с тем чтобы понять его полностью.

[4] «О формально неразрешимых суждениях в “Principia Mathematica” и родственных системах» (нем.).

[5] Мощность – количественная категория, «продолженная» на бесконечные множества.

[6] Так математики называют оригинальную теорию множеств Кантора за то, что в ней довольно скоро были обнаружены противоречия, от которых избавлены современные аксиоматические теории множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а д ь ю А. Бытие и событие. Континуум. Нью-Йорк, 2007. 526 с.
2. Б а д ь ю А. Манифест философии: Пер. с фр. СПб.: Machina, 2003. 184 с.
3. Б а д ь ю А. Логики миров. Бытие и событие 2. Континуум. Нью-Йорк, 2009. 617 с.
4. К а н т о р Г. К обоснованию учения о трансфинитных множествах // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 429 с.
5. К а р н а п Р. Философские основания физики. Введение в философию науки: Пер. с англ. М., 2003. 360 с.
6. М е н д е л ь с о н Э. Введение в математическую логику: Пер. с англ. М.: Наука, 1971. 320 с.
7. Н а г е л ь Э., Н ь ю м а н Дж. Доказательство Гёделя. Нью-Йорк, 2001. 129 с.
8. С к о т ч П. Введение в логику и ее философию [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=237C0361241302E10279894173B23E10?doi=10.1.1.138.4446&rep=rep1&type=pdf

---

Egorychev I. E., Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russian Federation)

INCOMPLETENESS OF AXIOMATIC THEORIES AS TRUTH OF REALITY

The purpose of the study is to analyze consequences contained in the main thesis of the article, which consists in the following: even though for the purposes of the theory of knowledge, completeness is a desired quality of axiomatic theories, at the same time, it points at their epistemological “poverty”. And in particular, this study shows why this formal fact has crucial philosophical meaning and straightforwardly pertains both to the limits of ontology and the theory of subject. After the survey of historical development of formal deductive structures the author studies axiomatic structures themselves and analyses the limits of axiomatization of propositional logic and arithmetic. Incompleteness of the latter was established by Kurt Gedel. Possible connection between his famous incompleteness theorems and a theory of subject may be established since a man, by all means, can be construed as a “system powerful enough to speak about itself”. Methodology of this study borrows many ideas of contemporary French philosopher Alain Badiou, who thinks that mathematical results are not solely mathematical, but might point to the ontological structure of reality.

Key words: proof, model, consistency, completeness, truth, subject, infinity

REFERENCES

1. B a d ’ y u A. *Bytiye i sobytiye. Kontinuum* [Being and Event. Continuum]. N. Y., 2007. 526 p.
2. B a d ’ y u A. *Manifest filosofii* [Manifesto for philosophy]. St. Petersburg, Machina Publ., 2003. 184 p.
3. B a d ’ y u A. *Logiki mirov. Bytiye i sobytiye 2. Kontinuum* [Logics of Worlds, Being and Event 2. Continuum]. N. Y., 2009. 617 p.
4. K a n t o r G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Gesammelte Abhandlungen und philosophischen Inhalts. [K obosnovaniyu ucheniya o transfinitnykh mnozhestvakh]. *Trudy po teorii mnozhestv*. Moscow, Nauka Publ., 1985. 429 p.
5. K a r n a p R. *Filosofskiye osnovaniya fiziki. Vvedeniye v filosofiyu nauki* [Philosophical foundations of physics. An introduction to the philosophy of science]. Moscow, 2003. 360 p.
6. M e n d e l ’ s o n E. *Vvedeniye v matematicheskuyu logiku* [Introduction to mathematical logic]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 320 p.
7. N a g e l ’ E., N ’ y u m a n Dzh. *Dokazatel’stvo Gyedelya* [Godel’s Proof]. N. Y., 2001. 129 p.
8. S k o t c h P. *Vvedeniye v logiku i eye filosofiyu* [Introduction to Logic and Its Philosophy]. Available at: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=237C0361241302E10279894173B23E10?doi=10.1.1.138.4446&rep=rep1&type=pdf

Поступила в редакцию 11.10.2013