

ИВАН ВЛАДИМИРОВИЧ АРХИПОВ

магистр математического факультета, программист
 IT-парка, Петрозаводский государственный университет
 (Петрозаводск, Российская Федерация)
 alien_aria@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСКРОЯ ЛЕСОСЫРЬЯ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ЛЕСОПИЛЬНЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ*

Представлена математическая модель раскроя бревна на пиломатериалы прямоугольного сечения, используемая при решении задачи планирования лесопильного производства средствами генератора столбцов в линейном программировании. При составлении плана должно быть учтено большое количество ограничений производственного и экономического характера. Полученная задача эффективно решается методом декомпозиции и динамическим программированием.

Ключевые слова: лесопиление, динамическое программирование, линейное программирование

ОПИСАНИЕ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

В рамках модели к производственным ограничениям линий лесопиления относятся следующие [2]:

- ограничение сверху на количество пил 1-го и 2-го рядов для линии лесопиления;
- толщина пропила для каждой линии (мм);
- максимальная высота и ширина постова;
- минимальная ширина двухкантного бруса, получаемого при первом проходе из бревна путем срезания двух боковых частей, которая устанавливается для каждого диаметра.

К важнейшим ограничениям, обусловленным структурой заказов, можно отнести следующие:

- минимальная и максимальная длина пиломатериалов, а также шаг, с которым обрезается пиломатериал (например, при длине 2,7–6 м и шаге 30 см доска длиной 3,5 м должна быть обрезана до 3,3 м, что снижает полезный выход);
- специфические требования по размещению пиломатериала относительно бревна: в брусковую часть, то есть выпиливать только из двухкантного бруса [4]; в боковую часть, то есть размещать пиломатериал только для распила при 1-м проходе; $2 \times k \text{ Ex Log}$, то есть только в центре бревна и в количестве 2 k шт. (без центральной доски); $2 \times k + 1 \text{ Ex Log}$, то есть только в центре бревна и в количестве 2 $k + 1$ шт. (с центральной доской); 2, 4, 6 Ex Log , то есть только в центре бревна и без центральной доски.

Предположим, что задано множество N всех возможных способов раскроя отрезка ствола дерева на пиломатериалы множества M [3].

Тогда полагаем b_i и B_i – ограничения сверху и снизу на объем пиломатериалов $i \in M$, c_j – ожидаемый доход от реализации 1 м³ пиломатериалов, распиливаемых по схеме $j \in N$, x_j – объем, распиливаемый по данной схеме. $A_{i,j}$ – выход пи-

ломатериала $i \in M$ при распиле единицы лесосырья по схеме $j \in N$. Получим следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} cx &\rightarrow \max, \\ b &\leq Ax \leq B, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Полученная задача весьма условна, ее вариантам будет посвящена следующая статья. В данной работе рассматривается частный вопрос построения столбцов матрицы $A [N, M]$, необходимый при использовании симплекс-метода.

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО СТОЛБЦА

Введем обозначения, используемые в математической модели.

Исходные данные: N – множество пиломатериалов; t_j – толщина пиломатериала, $j \in N$; w_j – ширина пиломатериала, $j \in N$; l_j^m – минимальная длина пиломатериала, $j \in N$; l_j^M – максимальная длина пиломатериала, $j \in N$; s_j^l – шаг длины пиломатериала (например, длины 2,7–6,0 с шагом 0,3 м), $j \in N$; b_j – признак «брусовости» пиломатериала, 1 – «брусковый», 0 – иначе, $j \in N$; u^b – минимальная доля объема «брусковых» пиломатериалов; u_j^s – максимальная доля выхода пиломатериала из боковой части, $j \in N$; v_j^l – двойственная оценка пиломатериала, $j \in N$; v^w – двойственная оценка древесины; v^m – двойственная оценка линии лесопиления; v^b – двойственная оценка ограничения на минимальную долю брусковых пиломатериалов; v_j^s – двойственная оценка ограничений на максимальную долю для постановки пиломатериала в боковую часть, $j \in N$; d^m – диаметр бревна в узкой части (вершина дерева); d^M – диаметр бревна в широкой части (основание дерева); l^w – длина бревна; l^w – объем одного бревна; c^w – стоимость 1 м³

древесины; c_j^l – стоимость 1 м³ пиломатериала, $j \in N$; s_1 – толщина пила при распиле двухкантного бруса; s_2 – толщина пила при первом проходе.

Неизвестные

Разобьем постав на 2 части – брусовая часть и боковая часть при первом проходе. В случае развального способа распила боковая часть пуста – таким образом, математическая модель охватывает большое количество различных линий лесопиления (рис. 1).

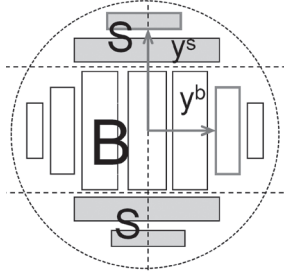


Рис. 1. Разбиение постава на 2 части, расстояние от центра до пиломатериалов

P^b – множество позиций для размещения пиломатериалов в брусовой части бруса (для пиломатериалов, расположенных симметрично относительно центра постава, итоговое количество пиломатериалов умножается на 2, для пиломатериала в центре (в случае наличия такого) прибавляется 1). Считаем, что позиции пронумерованы по удалению от центра бревна. P^s – множество позиций для размещения пиломатериалов в боковой части при первом проходе.

z_p^b – номер пиломатериала, помещенного на p -ю позицию постава в брусовой части. y_p^b – расстояние от центра постава до пиломатериала (который в сечении представляет собой прямоугольник) в брусовой части. Для центрального пиломатериала расстояние $y_p^b = -\frac{t_{z_p^b}}{2}$. На рис. 2 выделен пиломатериал, для которого расстояние $y_p^b = -\frac{t_{z_p^b}}{2}$.

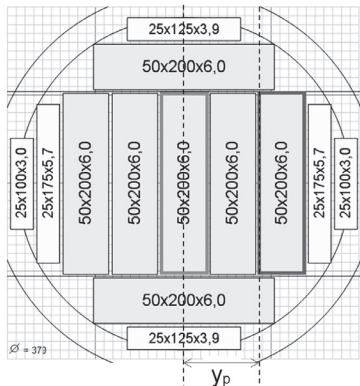


Рис. 2. Четное и нечетное размещение пиломатериала в поставе

l_p^b – длина пиломатериала на позиции p в брусовой части, рассчитывается следующим образом:

$$l_p^b = \begin{cases} \min \{ l_p^w, l_p^M \}, & \text{если } y_p^b + t_{z_p^b} \leq r^m \text{ и } w_{z_p^b} \leq 2\sqrt{(r^m)^2 - (y_p^b + t_{z_p^b})^2}, \\ 0, & \text{если } t^* l^w < l_p^m, \\ l_p^m + \left[\frac{t^* l^w - l_p^m}{s_{z_p^b}^l} \right] s_{z_p^b}^l, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\text{где } r^m = \frac{d^m}{2}, \quad r^M = \frac{d^M}{2}, \quad d^* = \sqrt{(y_p^b + t_{z_p^b})^2 + \left(\frac{w_{z_p^b}}{2} \right)^2},$$

$$t^* = \frac{r^M - d^*}{r^M - r^m}.$$

z_p^s – номер пиломатериала, помещенного на p -ю позицию постава в боковой части; y_p^s – расстояние от центра постава до пиломатериала в боковой части; l_p^s – длина пиломатериала на позиции p в боковой части.

Обозначим W^b – ширина полученного двухкантного бруса:

$$W^b = \max_{p \in P^b} \{ w_{z_p^b} \}. \quad (1)$$

W^c – ширина центральной части двухкантного бруса:

$$W^c = 2 \max_{p \in P^b} \left\{ y_p^b + t_{z_p^b} \mid w_{z_p^b} = W^b \right\}. \quad (2)$$

q_p – кратность пиломатериала на позиции для брусовой части

$$q_p = \begin{cases} 1, & \text{если } y_p^b = -\frac{t_{z_p^b}}{2}, \\ 2, & \text{если } y_p^b \neq -\frac{t_{z_p^b}}{2}. \end{cases}$$

g_p – признак того, что пиломатериал на позиции $p \in P^b$ располагается в боковой части

$$g_p = \begin{cases} 1, & \text{если } w_{z_p^b} < W^b, \\ 0, & \text{если } w_{z_p^b} = W^b. \end{cases}$$

Ограничения

- Позиции пиломатериалов идут в порядке удаления от центра, и расстояние между пиломатериалами равно толщине пропила:

$$y_p^b - y_{p-1}^b = t_{z_{p-1}^b} + s_1 \quad \text{для каждого } p \in \{2..|P^b|\}.$$

$$y_p^s - y_{p-1}^s = t_{z_{p-1}^s} + s_2 \quad \text{для каждого } p \in \{2..|P^s|\}.$$

- Ширина пиломатериалов не возрастает:

$$w_{z_p^b} \leq w_{z_{p-1}^b} \quad \text{для каждого } p \in \{2..|P^b|\}.$$

$$w_{z_p^s} \leq w_{z_{p-1}^s} \quad \text{для каждого } p \in \{2..|P^s|\}.$$

- Пиломатериалы из двухкантного бруса не пересекаются с пиломатериалами из боковой части:

$$\forall p \in P^s \quad y_p^s \geq \frac{W^b}{2} + s_2.$$

- Размещение пиломатериала на первой позиции (база):

$$y_1^b = \frac{s_1}{2} \text{ или } y_1^b = -\frac{t_{z_1^b}}{2}, \quad y_1^s = \frac{W^b}{2} + s_2.$$

- Пиломатериал принадлежит группе $D_{2 \times k}$ (требование $2k \text{ Ex Log}, k \in \mathbf{N}$):

$$\forall j \in D_{2 \times k} \Rightarrow \begin{cases} y_1^b = \frac{s_1}{2}, \\ z_1^b = z_2^b = \dots z_k^b = j, \\ \sum_{p \in P^b, z_p^b = j} q_p = 2k. \end{cases}$$

- Пиломатериал принадлежит группе $D_{2 \times k+1}$ (требование $2k+1 \text{ Ex Log}, k \geq 0, k \in \mathbf{Z}$):

$$\forall j \in D_{2 \times k+1} \Rightarrow \begin{cases} y_1^b = -\frac{t_{z_p^b}}{2}, \\ z_1^b = z_2^b = \dots z_{k+1}^b = j, \\ \sum_{p \in P^b, z_p^b = j} q_p = 2k+1. \end{cases}$$

- Пиломатериал принадлежит группе D_e (требование четный Ex Log – распил без центральной доски, например 2, 4, 6 Ex Log):

$$\forall j \in D_e \Rightarrow \begin{cases} y_1^b = \frac{s_1}{2}, \\ \exists k \in \mathbf{N} : z_1^b = z_2^b = \dots z_k^b = j \text{ и } \sum_{p \in P^b, z_p^b = j} q_p = 2k. \end{cases}$$

- Пиломатериал принадлежит группе $D_{a,b}$ – не менее, чем $a \text{ Ex Log}$, но не более, чем $b \text{ Ex Log}$:

$$\forall j \in D_{a,b} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbf{N} : z_1^b = z_2^b = \dots z_k^b = j, \\ a \leq \sum_{p \in P^b, z_p^b = j} q_p \leq b. \end{cases}$$

- Пиломатериал принадлежит группе D_{nm} :

$$\forall p : z_p^b \in D_{nm} \Rightarrow y_p^b \neq \frac{s_1}{2} \text{ и } y_p^b \neq -\frac{t_{z_p^b}}{2}.$$

- Количество различных пиломатериалов в поставе не превышает M^d :

$$\left| \left\{ \{ z_p^b, p \in P^b \} \cup \{ z_p^s, p \in P^s \} \right\} \right| \leq M^d. \quad (3)$$

- В поставе отсутствуют близкие по размерам пиломатериалы, то есть разница по толщине между любыми двумя пиломатериалами

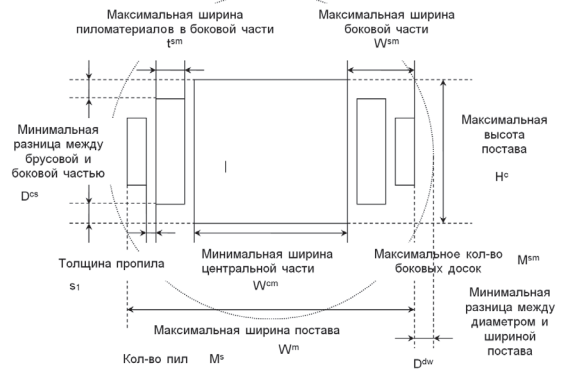


Рис. 3. Параметры поставы на схеме

либо равна 0, либо не менее чем t^d , аналогично по ширине либо 0, либо не менее W^d :

$$\forall p, r \in \{P^b \cup P^s\} \Rightarrow t_{z_p} = t_{z_r} \text{ или } |t_{z_p} - t_{z_r}| \geq t^d. \quad (4)$$

$$\forall p, r \in \{P^b \cup P^s\} \Rightarrow w_{z_p} = w_{z_r} \text{ или } |w_{z_p} - w_{z_r}| \geq W^d. \quad (5)$$

Минимальная ширина центральной части бруса не менее заданной для линии лесопиления W_{cm}^m : $W^c \geq W_{cm}^m$.

- Максимальная ширина поставы не превышает заданную для линии лесопиления W^m :

$$2 \max_{p \in P^b} \{ y_p^b + t_{z_p^b} \} \leq W^m.$$

- Максимальная высота поставы H^c : $W^b \leq H^c$.
- Разница между диаметром и шириной поставы не менее заданного для линии лесопиления D^{dw} (параметр необходим для того, чтобы в случае использования фрезерного станка для выпиливания боковой части не было слишком тонкой части):

$$d^m - 2 \max_{p \in P^b} \{ y_p^b + t_{z_p^b} \} \geq 2D^{dw}.$$

- Используемое количество пил не превышает заданные параметры для линии лесопиления M^{s_1} и M^{s_2} :

$$\sum_{p \in P^b} q_p + 1 \leq M^{s_1}, \quad 2|P^s| + 2 \leq M^{s_2}.$$

- Максимальное количество боковых досок в двухкантном бруссе M^{sm} :

$$\left| \left\{ p \in P^b : w_{z_p^b} < W^b \right\} \right| \leq M^{sm}.$$

- Максимальная ширина боковой части боковых досок в двухкантном бруссе W^{sm} :

$$\max_{p \in P^b} \left\{ y_p^b + t_{z_p^b} \mid w_{z_p^b} < W^b \right\} - \min_{p \in P^b} \left\{ y_p^b \mid w_{z_p^b} < W^b \right\} \leq W^{sm}.$$

- Максимальная толщина боковых досок в двухкантном бруссе t^{sm} :

$$\forall p \in P^b : w_{z_p^b} < W^b \Rightarrow t_{z_p^b} \leq t^{sm}.$$

- Аналогичные параметры по максимальному количеству боковых пиломатериалов, суммарной ширине боковой части и максимальной толщине боковых досок для позиций P^s .
- Минимальная разница между брусовой и боковой частями не более заданного для линии лесопиления D^{cs} :

$$W^b - \max_{p \in P^b} \left\{ w_{z_p}^b \mid w_{z_p}^b < W^b \right\} \geq 2D^{cs}.$$

Для поиска оптимального столбца необходимо решить задачу: $-vA_j + c_j \rightarrow \max$. В данном случае матрица A – генерируемая матрица, каждый столбец которой представляет собой выход продукции каждого вида из постава, а также вспомогательные элементы для прочих ограничений. Поскольку целевая функция c представляет собой суммарную долю выхода продукции из постава, то при расчетах нельзя брать ее как константу, так как в нее входят неизвестные выходы пиломатериалов [1]. Рассмотрим вариант целевой функции по оптимальному выходу, по доходу – аналогично.

Обозначим $P = \{P^b \cup P^s\}$ (считаем, что множества P^b и P^s не пересекаются по индексам).

В исходной задаче ограничения на брусовые пиломатериалы и на максимальную долю выхода боковых досок выглядят следующим образом:

$$\sum_{j \in N} \sum_{i \in L} A_{i,j} (u^b - b_i) x_j \leq 0, \sum_{j \in N} \sum_{i \in L} A_{i,j} x_j (b_{i,j}^s - u_i^s) \leq 0,$$

где $b_{i,j}^s$ – доля выхода пиломатериала i из постава j из боковой части.

Тогда целевая функция генератора выглядит следующим образом:

$$\sum_{p \in P} \frac{l_p q_p t_{z_p} w_{z_p}}{V^w} (-v_{z_p}^l + 1 - v^b (u^b - b_{z_p}) - v_j^s (g_p - u_{z_p}^s)) - v^w - v^m \rightarrow \max.$$

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПОСТАВА

Для решения данной задачи разобьем множество неизвестных позиций на блоки (рис. 4):

1. Центральная часть основного прохода $\{p \in P^b : w_{z_p}^b = W^b\}$;
2. Боковая часть основного прохода $\{p \in P^b : w_{z_p}^b < W^b\}$;
3. Боковая часть первого прохода $\{P^s\}$.

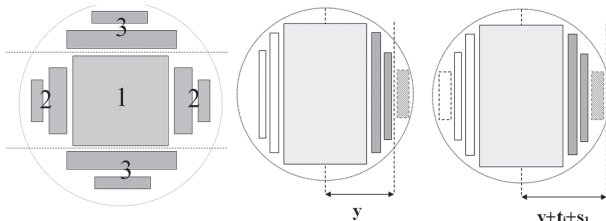


Рис. 4. Разбиение постава на блоки. Переход в динамическом программировании

Рассмотрим подзадачу поиска оптимального распила одной из частей бревна (возьмем для примера часть 2). Введем параметры: y – текущее расстояние от центра бревна; s – текущее используемое количество пиломатериалов.

Таким образом, для каждого состояния пытаемся добавить каждый пиломатериал и осуществить переход от состояния (y, s) к состоянию $(y + t_j + s_p, s + 2)$ (рис. 4).

В результате указанного разбиения задача может быть решена методом динамического программирования, а итоговое решение собирается из 3 частей. Укрупненная блок-схема алгоритма приведена на рис. 5.

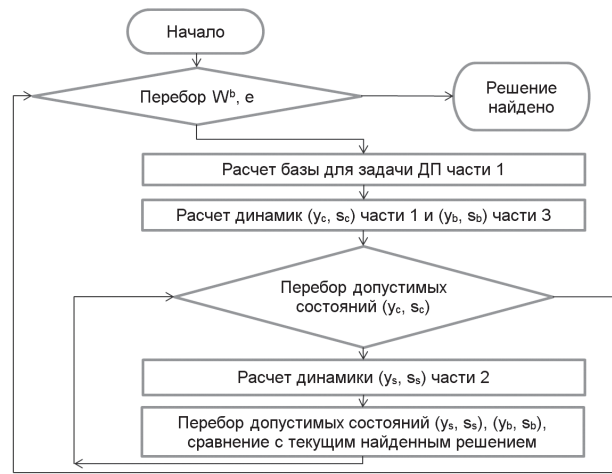


Рис. 5. Алгоритм решения поиска оптимального постава

Теорема 1. Алгоритм находит оптимальное решение исходной задачи.

Доказательство.

Рассмотрим оптимальное решение $(y^{b*}, z^{b*}, y^{s*}, z^{s*})$. Ему по формуле (1) соответствует W^{b*} . Поскольку в алгоритме перебираются все возможные W^b , искомое значение W^{b*} будет рассмотрено.

Далее пусть оптимальному решению соответствует W^{e*} (формула (2)). Поскольку в алгоритме перебираются все возможные значения W^e , то искомое значение также будет рассмотрено.

Осталось показать оптимальность для подзадач при расчете каждой из 3 частей.

Рассмотрим в качестве примера часть 2. Предположим, что в состоянии $(y + t_j + s_p, s + 2)$ последним был взят элемент j . Если состояние (y, s) не оптимальное, то можно взять другие элементы, улучшив решение для состояния $(y + t_j + s_p, s + 2)$, при этом не нарушив остальные ограничения. Следовательно, подзадача в данном случае оптимальна, и это означает, что алгоритм находит оптимальное решение.

Заметим, что в случае присутствия ограничений (3)–(5) указанный алгоритм не будет работать, поскольку появляется зависимость расчета 3 частей от взятых элементов, следовательно,

необходимо организовать перебор всех допустимых по ограничениям (4), (5) подмножеств элементов, а уже при выбранном подмножестве выполнить указанный алгоритм.

Теорема 2. Сложность алгоритма $O(N^2L^2S^2 + L^3S^3)$, где L – количество возможных позиций u_p (в случае вещественных позиций умножаем, чтобы получить целые части), $S = \max\{M^{s_1}, M^{s_2}\}$.

Доказательство.

В работе алгоритма на самом верхнем уровне осуществляется перебор всех возможных W^b , а поскольку их количество ограничено N , следовательно, в оценке получаем первый сомножитель N . Далее шаги по расчету динамики для части 1 добавляют в сложности LSN на каждой итерации перебора W^b в силу того, что состояний в динамическом программировании LS , а на переход необходимо N итераций. Аналогично шаги по расчету части 3 занимают LSN операций. После этого перебираются все возможные

состояния (y_c, s_c) , что занимает LS операций. Для каждой итерации необходим расчет части 2, что по аналогии с частью 1 и 3 занимает LSN итераций, и в конце работы необходим перебор состояний из частей 2 и 3, что занимает L^2S^2 операций, в результате: $O(N^2L^2S^2 + L^3S^3)$.

Заметим, что на практике алгоритм работает быстрее в силу следующих факторов:

- не все состояния достижимы;
- при расчете ч. 3 состояния начинаются с $\frac{W^b}{2}$;
- чаще всего множество позиций – просто целые числа, поскольку параметры t_j и w_j представляют собой целые числа в миллиметрах (редко миллиметры с десятичными долями).

Система реализована средствами Microsoft Visual Studio 2012 и прошла опытную эксплуатацию на Соломенском лесозаводе (г. Петрозаводск), где она продемонстрировала экономический эффект 400–700 тыс. руб. в месяц.

* Работа выполняется при поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов А. Ф., Воронин А. В., Кузнецов В. А., Пладов В. Н., Шегельман И. Р. Оптимизация в планировании и управлении предприятиями регионального лесопромышленного комплекса. Петрозаводск, 2001. 218 с.
2. Воронин А. В., Кузнецов В. А., Шабаетов А. И., Архипов И. В., Кашевник А. М. Разработка и реализация системы планирования лесопильным производством // Труды СПИИРАН. СПб., 2012. С. 400–415.
3. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Новосибирск, 1972. 300 с.
4. Соболев И. В. Управление производством пиломатериалов. М.: Лесн. пром-сть, 1981. 184 с.

Arkhipov I. V., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

MATHEMATICAL MODELS AND GEOMETRICAL FEATURES OF WOOD SAWING IN PLANNING AND MANAGEMENT OF SAWMILL INDUSTRY

A mathematical model of log section sawing into sawn timber of rectangular section is presented in the article. To solve the task the suggested model based on the use of the generator of columns in linear programming is used. In making the plan, a large number of economic and production restrictions has to be considered.

Key words: wood sawing, dynamic programming, linear programming

REFERENCES

1. Bulatov A. F., Voronin A. V., Kuznetsov V. A., Pladov V. N., Shegel'man I. R. *Optimizatsiya v planirovanii i upravlenii predpriyatiyami regional'nogo lesopromyshlennogo kompleksa* [Optimization in planning and management of the enterprises of regional timber processing complex]. Petrozavodsk, PetrSU Publ., 2001. 218 p.
2. Voronin A. V., Kuznetsov V. A., Shabaev A. I., Arkhipov I. V., Kashevnik A. M. Research and development of a software system for sawmill operation planning [Razrabotka i realizatsiya sistemy planirovaniya lesopil'nym proizvodstvom]. *Trudy SPIIRAN*. St. Petersburg, 2012. P. 400–415.
3. Kantorovich L. V., Zalgaller V. A. *Ratsional'nyy raskroy promyshlennykh materialov* [Rational cutting of industrial materials]. Novosibirsk, 1972. 300 p.
4. Sobolev I. V. *Upravlenie proizvodstvom pilomaterialov* [Production management of timber]. Moscow, Lesn. prom-st' Publ., 1981. 184 p.

Поступила в редакцию 13.06.2013