УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Март, № 2 Технические науки 2011

УДК 624.014 .074 : 539.4

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ
кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета, Петрозаводский государственный университет
metalll@bk.ru

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В работе получено решение задачи пространственного деформационного расчета неупругих составных стержней, имеющих переменное поперечное сечение и переменную жесткость связей сдвига по длине. В основу решения положена теория составных стержней А. Р. Ржаницына. Использованы полученные нами ранее выражения для определения модулей деформаций, учитывающих сжимаемость осей ветвей, деформации сдвига материала ветвей, составляющих стержень, развитие неупругих линейных деформаций в них. Учтена переменная жесткость неупругого составного стержня на кручение.

Ключевые слова: пространственный деформационный расчет, тонкостенные профили, эквивалентные модули деформаций, жесткости на кручение

В настоящей статье исследуется поведение под нагрузкой пространственно-деформируемого составного упругопластического стержня, имеющего переменное сечение по длине. Тонкостенные ветви открытого профиля, составляющие стержень, соединены между собой структурными связями в виде раскосов, распорок, планок или перфорированных листов. В работе применяются основные положения общей теории составных стержней, разработанной А. Р. Ржаницыным [4]. Для материала ветвей составного стержня устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжением. Используется гипотеза о нелинейно-упругом материале, основанная на теореме, доказанной Л. М. Качановым в [2], согласно которой при активной пластической деформации поведение упругопластического тела неотличимо от поведения нелинейно-упругого тела.

Исследование стержня базируется на использовании системы дифференциальных уравнений, полученных в [4] и описывающих напряженно-деформированное состояние упругого пространственно работающего составного стержня постоянного сечения по длине с упругоподатливыми связями сдвига, имеющими постоянную жесткость по длине стержня, и абсолютно жесткими поперечными связями. Геометрическая неизменяемость поперечного сечения стержня обеспечивается часто поставленными поперечными диафрагмами жесткости. Эта система уравнений предназначена для определения усилий в продольных связях сдвига в $\bar{n}$ швах составного стержня. В данной работе осуществлена замена указанной системы дифференциальных уравнений системой уравнений в конечных разностях [3], в которую введены параметры, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность решаемой задачи. Ось составного стержня делится по длине на m равных частей с образованием участков между смежными сечениями j и $(j+1)$ длиной c. Используется метод шагового нагружения конструкций [1].

Полная система дифференциальных уравнений, включающая в себя уравнения приращения сдвигов в швах составного стержня и уравнение стесненного кручения составного стержня в целом, в конечно-разностной форме примет вид

$$\begin{gathered}\Delta^2 T_{igj}^{(k)}/(c^2\xi_{igj}^{(k)}) = T_{igj}^{(k)}\delta_{igj,igj}^{(k)} + \sum_{l=1}^{a_{ig}} T_{ilj}^{(k)}\delta_{igj,ilj}^{(k)} + \\ +\sum_{r=1}^{b_{ig}} T_{grj}^{(k)}\delta_{igj,grj}^{(k)} + \sum_{l,u=1}^{c_{ig}} T_{luj}^{(k)}\delta_{igj,luj}^{(k)} + \delta_{igj,0}^{(k)} - \\ -\theta_j^{(k)} C_{tj}^{(k)} \Delta\omega_{igj}^{(k)} / C_{\omega j}^{(k)}, \\ C_{\omega j}^{(k)}\Delta^2\theta_j^{(k)}/c^2 - C_{tj}^{(k)}\theta_j^{(k)} = -B_{\omega j}^{(k)} - \sum_{ig=1}^{\bar{n}} T_{igj}^{(k)}\omega_{igj}^{(k)},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\xi_{igj}^{(k)}$ – коэффициент жесткости связей сдвига ig-го шва, соединяющего между собой i-ю и g-ю ветви составного стержня, на k-м шаге нагружения; $T_{igj}^{(k)}$ – суммарное сдвигающее усилие в ig-м шве, накапливаемое по длине составного стержня от его начала до j-го поперечного сечения;

$$T_{igj}^{(k)} = \int_0^{z_j} \tau_{ig}^{(k)} dz, \tag{2}$$

здесь $\tau_{ig}^{(k)}$ – сдвигающие усилия, действующие в ig-м шве составного стержня на k-м шаге нагружения;

$$\Delta^2 T_{igj}^{(k)} = T_{ig,j+1}^{(k)} - 2T_{igj}^{(k)} + T_{ig,j-1}^{(k)}, \tag{3}$$

$$\Delta^2\theta_j^{(k)} = \theta_{j+1}^{(k)} - 2\theta_j^{(k)} + \theta_{j-1}^{(k)}; \tag{4}$$

a_{ig} – число связей сдвига, соединяющих i-й стержень с другими стержнями (не считая g-го стержня); b_{ig} – число связей сдвига, соединяющих g-й стержень с другими стержнями (не считая i-го стержня); c_{ig} – число связей сдвига, не примыкающих ни к i-му, ни к g-му стержню.

Коэффициенты при неизвестных и нагрузочный член в (1) определяются из выражений

$$\delta_{igj,igj}^{(k)}=\frac{(\Delta\omega_{igj}^{(k)})^2}{C_{\omega j}^{(k)}}+\frac{(\Delta y_{igj}^{(k)})^2}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{1dj}^{equ(k)}J_{xdj}}+\frac{(\Delta x_{igj}^{(k)})^2}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{2dj}^{equ(k)}J_{ydj}}+\frac{1}{E_{cija}^{(k)}A_{ij}}-\frac{1}{E_{cgja}^{(k)}A_{gj}},$$

$$\delta_{igj,ilj}^{(k)}=\frac{\Delta\omega_{igj}^{(k)}\Delta\omega_{ilj}^{(k)}}{C_{\omega j}^{(k)}}+\frac{\Delta y_{igj}^{(k)}\Delta y_{ilj}^{(k)}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{1dj}^{equ(k)}J_{xdj}}+\frac{\Delta x_{igj}^{(k)}\Delta x_{ilj}^{(k)}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{2dj}^{equ(k)}J_{ydj}}+\frac{1}{E_{cija}^{(k)}A_{ij}},$$

$$\delta_{igj,grj}^{(k)}=\frac{\Delta\omega_{igj}^{(k)}\Delta\omega_{grj}^{(k)}}{C_{\omega dj}^{(k)}}+\frac{\Delta y_{igj}^{(k)}\Delta y_{grj}^{(k)}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{1dj}^{equ(k)}J_{xdj}}+\frac{\Delta x_{igj}^{(k)}\Delta x_{grj}^{(k)}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{2dj}^{equ(k)}J_{ydj}}-\frac{1}{E_{cgja}^{(k)}A_{gj}}, \quad (5)$$

$$\delta_{igj,luj}^{(k)}=\frac{\Delta\omega_{igj}^{(k)}\Delta\omega_{luj}^{(k)}}{C_{\omega dj}^{(k)}}+\frac{\Delta y_{igj}^{(k)}\Delta y_{luj}^{(k)}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{1dj}^{equ(k)}J_{xdj}}+\frac{\Delta x_{igj}^{(k)}\Delta x_{luj}^{(k)}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{2dj}^{equ(k)}J_{ydj}},$$

$$\delta_{igj,0}^{(k)}=\frac{B_{\omega j}^{(k)}\Delta\omega_{igj}^{(k)}}{C_{\omega dj}^{(k)}}+\frac{M_{xj}^{(k)}\Delta y_{igj}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{1dj}^{equ(k)}J_{xdj}}+\frac{M_{yj}^{(k)}\Delta x_{igj}}{\sum\limits_{d=1}^{n}E_{2dj}^{equ(k)}J_{ydj}}+\frac{N_{ij}^{(k)}}{E_{cija}^{(k)}A_{ij}}-\frac{N_{gj}^{(k)}}{E_{cgja}^{(k)}A_{gj}},$$

где $\Delta\omega_{igj}^{(k)}$, $\Delta\omega_{ilj}^{(k)}$, $\Delta\omega_{grj}^{(k)}$ и $\Delta\omega_{luj}^{(k)}$ – разности секториальных координат положения швов в j-м поперечном сечении, отнесенные к стержням i и g, i и l, g и r, l и u соответственно при k-м шаге нагружения (ветви l и u не являются ни i-ми, ни g-ми ветвями); Δx_{igj} и Δy_{igj}, Δx_{ilj} и Δy_{ilj}, Δx_{luj} и Δy_{luj}, Δx_{luj} и Δy_{luj} – разности координат центров тяжести j-х поперечных сечений ветвей i и g, i и l, g и r, l и u, составляющих стержень; $E_{1dj}^{equ(k)}$ и $E_{2dj}^{equ(k)}$ – эквивалентные модули деформаций для j-го поперечного сечения d-й ветви составного стержня, учитывающие сжимаемость оси ветвей стержня, влияние деформаций сдвига материала ветвей и развитие пластических деформаций при их изгибе в плоскостях $y0z$ и $x0z$ соответственно на k-м шаге нагружения; $E_{cija}^{(k)}$ и $E_{cgja}^{(k)}$ – секущие модули деформаций для осевых волокон j-х поперечных сечений i-й и g-й ветвей стержня соответственно при k-м шаге нагружения; A_{ij} и A_{gj} – площади j-го поперечного сечения ветвей i и g соответственно; J_{ij} и J_{gj} – экviторіальные моменты инерции j-го поперечного сечения ветвей i и g соответственно; $B_{\omega j}^{(k)}$ – внешний бимомент в j-м поперечном сечении составного стержня на k-м шаге нагружения; $M_{xj}^{(k)}$ и $M_{yj}^{(k)}$ – изгибающие моменты в j-м поперечном сечении составного стержня от внешней нагрузки при изгибе в плоскостях $y0z$ и $x0z$ соответственно на k-м шаге нагружения; $N_{ij}^{(k)}$ и $N_{gj}^{(k)}$ – продольные силы в j-м поперечном сечении ветвей i и g составного стержня от внешней нарузки на k-м шаге нагружения; $C_{\omega j}^{(k)}$ и $C_{tj}^{(k)}$ – жесткости при стесненном и чистом кручении соответственно j-го поперечного сечения составного стержня при k-м шаге нагружения.

Выражения для определения $E_{1dj}^{equ(k)}$ и $E_{2dj}^{equ(k)}$ были получены и опубликованы нами ранее [5]:

$$E_{1dj}^{equ(k)}=\frac{M_{xdj}^{(k-1)}h_{ydj}(1-\varepsilon_{odj}^{(k-1)})}{(\Delta\overline{\varepsilon}_{12dj}^{(k-1)}-\gamma_{ydj}^{(k-1)}h_{ydj}Q_{ydj}^{\prime(k-1)})J_{xdj}}, \quad (6)$$

$$E_{2dj}^{equ(k)}=\frac{M_{ydj}^{(k-1)}h_{xdj}(1-\varepsilon_{odj}^{(k-1)})}{(\Delta\overline{\varepsilon}_{23dj}^{(k-1)}-\gamma_{xdj}^{(k-1)}h_{xdj}Q_{xdj}^{\prime(k-1)})J_{ydj}}, \quad (7)$$

где $M_{xdj}^{(k-1)}$ и $M_{ydj}^{(k-1)}$ – изгибающие моменты в j-м сечении d-й ветви стержня, возникающие при изгибе в плоскостях $y0z$ и $x0z$ соответственно на $(k-1)$-м шаге нагружения; h_{ydj} и h_{xdj} – высота j-го поперечного сечения d-й ветви стержня при изгибе в плоскостях $y0z$ и $x0z$ соответственно; $\varepsilon_{odj}^{(k-1)}$ – линейная деформация оси d-й ветви в j-м сечении при k-м шаге нагружения;

$\Delta\overline{\varepsilon}_{12dj}^{(k-1)}=\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}-\overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}$; $\Delta\overline{\varepsilon}_{23dj}^{(k-1)}=\overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}-\overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}$; $\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}$, $\overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}$ и $\overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}$ –

краевые линейные деформации в трех продольных волокнах поперечного сечения d-й ветви, возникающие в соответствии с гипотезой плоских сечений от продольной силы $N_{dj}^{(k-1)}$, изгибающих моментов $M_{xdj}^{(k-1)}$ и $M_{ydj}^{(k-1)}$, действующих в двух главных плоскостях инерции j-го поперечного сечения; $\gamma_{y1dj}^{(k-1)}$ и $\gamma_{x1dj}^{(k-1)}$ – углы сдвига на j-м участке d-й ветви стержня от единичной поперечной силы при изгибе в плоскостях $y0z$ и $x0z$ соответственно на $(k-1)$-м шаге нагружения; $Q_{ydj}'^{(k-1)}$ и $Q_{xdj}'^{(k-1)}$ – первые производные от поперечных сил, действующих в j-м сечении d-й ветви стержня при изгибе в плоскостях $y0z$ и $x0z$ соответственно на $(k-1)$-м шаге нагружения, которые в конечно-разностной форме имеют вид:

$$Q_{ydj}'^{(k-1)} \approx (Q_{yd,j+1}^{(k-1)} - Q_{yd,j-1}^{(k-1)})/(2c), \tag{8}$$

$$Q_{xdj}'^{(k-1)} \approx (Q_{xd,j+1}^{(k-1)} - Q_{xd,j-1}^{(k-1)})/(2c). \tag{9}$$

Для определения деформаций $\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}$, $\overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}$, $\overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{\omega dj}^{(k-1)}$ контур s j-го поперечного сечения ветвей стержня делится на p участков с υ-м волокном на границах смежных участков. Линейная деформация в каждом υ-м волокне j-го поперечного сечения d-й ветви составного стержня $\varepsilon_{dj\upsilon}^{(k-1)}$ является функцией следующих параметров:

$$\varepsilon_{dj\upsilon}^{(k-1)} = \varepsilon_{dj\upsilon}^{(k-1)}(\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}, \varepsilon_{\omega dj\upsilon}^{(k-1)}), \tag{10}$$

где $\varepsilon_{\omega dj\upsilon}^{(k-1)}$ – линейная деформация от стесненного кручения в υ-м волокне j-го поперечного сечения d-й ветви составного стержня при $(k-1)$-м шаге нагружения.

Параметры, от которых зависит функция $\varepsilon_{dj\upsilon}^{(k-1)}$, определяются из решения системы уравнений равновесия

$$\begin{gathered}
N_{dj}^{\text{int}(k-1)}(\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}, \varepsilon_{\omega dj\upsilon}^{(k-1)}) = N_{dj}^{(k-1)}, \\
M_{xdj}^{\text{int}(k-1)}(\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}, \varepsilon_{\omega dj\upsilon}^{(k-1)}) = M_{xdj}^{(k-1)}, \\
M_{ydj}^{\text{int}(k-1)}(\overline{\varepsilon}_{1dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{2dj}^{(k-1)}, \overline{\varepsilon}_{3dj}^{(k-1)}, \varepsilon_{\omega dj\upsilon}^{(k-1)}) = M_{ydj}^{(k-1)}, \quad (11) \\
C_{\omega j}^{(k-1)} \Delta^3 \theta_j^{(k-1)}/c^3 - C_{tj}^{(k-1)} \Delta\ \theta_j^{(k-1)}/c = -M_{tj}^{(k-1)} \\
\varepsilon_{\omega dj\upsilon}^{(k-1)} = -\Delta^2 \theta_j^{(k-1)} \omega_{dj\upsilon}^{(k-1)}/c^2,
\end{gathered}$$

где $N_{dj}^{\text{int}(k-1)}$, $M_{xdj}^{\text{int}(k-1)}$, $M_{ydj}^{\text{int}(k-1)}$ – выражения для определения главного вектора и главных моментов эпюры нормальных напряжений в j-м поперечном сечении d-й ветви после $(k-1)$-го шага нагружения; $N_{dj}^{(k-1)}$, $M_{xdj}^{(k-1)}$, $M_{ydj}^{(k-1)}$ – продольные сила и изгибающие моменты, действующие в главных плоскостях j-го поперечного сечения d-й ветви, полученные при $(k-1)$-м шаге нагружения составного стержня; $M_{tj}^{(k-1)}$ – крутящий момент в j-м поперечном сечении составного стержня, полученный при $(k-1)$-м шаге нагружения; $\omega_{dj\upsilon}^{(k-1)}$ – секториальная координата места расположения υ-го волокна j-го поперечного сечения d-й ветви составного стержня при $(k-1)$-м шаге нагружения;

$$\theta_j^{(k-1)} = (\theta_{j+1}^{(k-1)} - \theta_{j-1}^{(k-1)})/2,$$
$$\Delta^3 \theta_j^{(k-1)} = (\theta_{j+2}^{(k-1)} - 2\theta_{j+1}^{(k-1)} + 2\theta_{j-1}^{(k-1)} - \theta_{j-2}^{(k-1)})/2. \tag{12}$$

Выражения для определения жесткостей $C_{\omega j}^{(k)}$ и $C_{tj}^{(k)}$ имеют вид:

$$C_{\omega j}^{(k)} = \sum_{d=1}^{n} \sum_{\upsilon=1}^{p} \int_{s_\upsilon} \widehat{E}_{cdj}^{(k-1)}(s) \overline{J}_{\omega dj}^{(k-1)}(s) ds, \tag{13}$$

$$C_{tj}^{(k)} = \sum_{d=1}^{n} \sum_{\upsilon=1}^{p} \int_{s_\upsilon} \widehat{G}_{dj}^{(k-1)}(s) \overline{J}_{tdj}(s) ds, \tag{14}$$

где $\widehat{E}_{cdj}^{(k-1)}(s)$ – функция, построенная путем интерполяции по значениям секущего модуля $E_{cdj\upsilon}^{(k-1)}$ в узловых точках υ контура s j-го поперечного сечения d-й ветви при $(k-1)$-м шаге нагружения; $J_{\omega dj}^{(k-1)}(s)$ – момент инерции при стесненном кручении единицы длины линии профиля s j-го поперечного сечения d-й ветви при $(k-1)$-м шаге нагружения; $G_{dj}^{(k-1)}(s)$ – функция, построенная путем интерполяции по значениям модуля сдвига $G_{dj\upsilon}^{(k-1)}$ в узловых точках υ контура s j-го поперечного сечения d-й ветви при $(k-1)$-м шаге нагружения; $J_{tdj}^{(k)}(s)$ – момент инерции при чистом кручении единицы длины линии профиля s j-го поперечного сечения d-й ветви при $(k-1)$-м шаге нагружения; s_υ – длина υ-го участка контура s поперечного сечения.

Величина $E_{cdj\upsilon}^{(k-1)}$ определяется по диаграмме деформирования материала d-й ветви в зависимости от $\varepsilon_{dj\upsilon}^{(k-1)}$, получаемой при решении системы (11).

Модули $G_{dj\upsilon}^{(k-1)}$ и $E_{cdj\upsilon}^{(k-1)}$ связаны между собой зависимостью

$$G_{dj\upsilon}^{(k-1)} = \frac{E_{cdj\upsilon}^{(k-1)}}{2(1+\mu_{dj\upsilon}^{(k-1)})}, \tag{15}$$

где $\mu_{dj\upsilon}^{(k-1)}$ – коэффициент Пуассона, определяемый по формуле:

$$\mu_{dj\upsilon}^{(k-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{cdj\upsilon}^{(k-1)}(1-2\mu_o)}{E_o}, \tag{16}$$

здесь E_o и μ_o – модуль деформаций Юнга и коэффициент Пуассона в начальной точке диаграммы деформирования материала.

Положение центра жесткости в j-м поперечном сечении составного стержня, необходимое для определения $\omega_{dj\upsilon}^{(k-1)}$ и $J_{\omega dj}^{(k-1)}(s)$, устанавливается относительно произвольной декартовой системы координат x и y с использованием выражений

$$c_{xj}^{(k-1)} = (\Pi_{3j}^{(k-1)} - \Pi_{4j}^{(k-1)})/(\Pi_{1j}^{(k-1)} - \Pi_{2j}^{(k-1)}), \quad (17)$$

$$c_{yj}^{(k-1)} = (\Pi_{5j}^{(k-1)} - \Pi_{6j}^{(k-1)})/(\Pi_{1j}^{(k-1)} - \Pi_{2j}^{(k-1)}), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
\Pi_{1j}^{(k-1)} &= \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xdj} \cdot \sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{ydj}, \\
\Pi_{2j}^{(k-1)} &= \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} \cdot \sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{xydj}, \\
\Pi_{3j}^{(k-1)} &= \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xdj} (\sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{ydj} b_{xdj} + \\
&\quad + \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} b_{ydj}), \\
\Pi_{4j}^{(k-1)} &= \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} (\sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{ydj} b_{xdj} + \\
&\quad + \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} b_{ydj}), \qquad (19) \\
\Pi_{5j}^{(k-1)} &= \sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{ydj} (\sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} b_{xdj} + \\
&\quad + \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xdj} b_{ydj}), \\
\Pi_{6j}^{(k-1)} &= \sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} (\sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k-1)} J_{ydj} b_{xdj} + \\
&\quad + \sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k-1)} J_{xydj} b_{ydj}),
\end{aligned}$$

где b_{xdj} и b_{ydj} – координаты центра тяжести j-го поперечного сечения d-й ветви относительно осей x и y соответственно; J_{xdj} и J_{ydj} – экваториальные моменты инерции j-го поперечного сечения d-й ветви относительно осей x и y соответственно; J_{xydj} и J_{yxdj} – центробежные моменты инерции j-го поперечного сечения d-й ветви относительно осей x и y соответственно.

Коэффициенты жесткости связей сдвига $\xi_{igj}^{(k)}$ определяются по формулам, приведенным в [4], но с использованием за пределом упругости эквивалентного модуля деформаций, если элементы связей работают на изгиб (по аналогии с $E_{1dj}^{equ(k)}$ или $E_{2dj}^{equ(k)}$), и секущего модуля деформаций, если элементы связей работают на осевую силу (по аналогии с $E_{cija}^{(k)}$ или $E_{cgja}^{(k)}$).

Для определения перемещений составного стержня $\zeta_j^{(k)}$ и $\eta_j^{(k)}$ в плоскостях $y0z$ и $x0z$ система уравнений (1) дополняется уравнениями изгиба

$$\sum_{d=1}^{n} E_{1dj}^{equ(k)} J_{xdj} \cdot \Delta^2 \zeta_j^{(k)} / c^2 + \sum_{ig=1}^{\bar{n}} T_{ig}^{(k)} \Delta y_{igj}^{(k)} + \widehat{M}_{xj}^{(k)} = 0, \quad (20)$$

$$\sum_{d=1}^{n} E_{2dj}^{equ(k)} J_{ydj} \cdot \Delta^2 \eta_j^{k)} / c^2 + \sum_{ig=1}^{\bar{n}} T_{ig}^{(k)} \Delta x_{igj}^{(k)} + \widehat{M}_{yj}^{(k)} = 0, \quad (21)$$

где $\widehat{M}_{xj}^{(k)}$ и $\widehat{M}_{yj}^{(k)}$ – выражения для определения изгибающих моментов в главных плоскостях инерции j-го поперечного сечения стержня, составленные с учетом влияния перемещений $\zeta_j^{(k)}$, $\eta_j^{(k)}$ и $\theta_j^{(k)}$;

$$\Delta^2 \zeta_j^{(k)} = \zeta_{j+1}^{(k)} - 2\zeta_j^{(k)} + \zeta_{j-1}^{(k)}, \quad (22)$$

$$\Delta^2 \eta_j^{(k)} = \eta_{j+1}^{(k)} - 2\eta_j^{(k)} + \eta_{j-1}^{(k)}. \quad (23)$$

Привлекая граничные условия, вышеприведенные выражения позволяют выполнить пространственный деформационный расчет неупругого составного стержня. Результаты деформационного расчета могут в дальнейшем быть использованы для проверки устойчивости составного стержня путем подстановки их в определитель, составленный из коэффициентов при вариациях независимых переменных проварьированной системы уравнений равновесия. Равенство этого определителя нулю будет свидетельствовать о критическом состоянии составного стержня [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 61–73.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.
4. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 314 с.
5. Рочев А. А. Нелинейная теория расчета сквозных упругопластических статически неопределимых рамных систем // Доклады 58-й конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета: В 3 ч. Ч. 1. СПб.: СПбГАСУ, 2001. С. 93–94.
6. Санжаровский Р. С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 280 с.