

АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КИРИЛЛОВ

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований, Карельский научный центр РАН  
kirillov@krc.karelia.ru

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИКИ ГРУППЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВАРОЧНЫХ РЕАКТОРОВ

Рассматривается задача управления процессом производства целлюлозы периодическим способом. Строится математическая модель динамики группы варочных реакторов. Для согласованного функционирования технологической линии предложен алгоритм управления.

Ключевые слова: управление, целлюлоза, математическая модель, динамика, реактор

### ВВЕДЕНИЕ

При производстве целлюлозы периодическим способом варочные котлы объединяются в технологическую линию с последовательным обслуживанием их на стадиях загрузки щепой и химикатами и выгрузки целлюлозной массы. Для того чтобы материальные потоки, входящие в отдел варки и выходящие из него, имели постоянные временные характеристики, составляется циклограмма, то есть график работы котлов, который обеспечивает их последовательный выход на стадии загрузки и выгрузки [2]. Задача системы обслуживания состоит в выдерживании этого графика. Но действие возмущений, таких как падение давления греющего пара, вынужденные задержки процесса варки при отказах оборудования смежных производств, нарушения технологического регламента, изменение характеристик сырья и химикатов, приводит к нарушению графика работы варочных реакторов, что снижает производительность варочного отдела. В [3] для обеспечения инвариантности циклограммы к колебаниям параметров пара строится кусочно-постоянная функция расхода пара. При этом рассматривается частный случай, при котором происходит наложение не более двух стадий варки. Не рассматривается возможность выхода на разгрузку нескольких реакторов одновременно, не учитывается динамика стадии химических превращений. Таким образом, не обеспечивается инвариантность циклограммы по отношению к перечисленным выше возмущениям. В связи с этим предлагается новый подход к моделированию безопасной динамики функционирования технологической линии в процессе варки целлюлозы, основанный на рассмотрении последовательности реакторов как динамической системы с переменной структурой.

© Кириллов А. Н., 2011

### ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим сначала общую постановку задачи и предложим подход к математическому моделированию системы управления группой реакторов. Пусть  $n$  реакторов объединены последовательно в технологическую линию,  $i$  – номер реактора,  $i = 1, \dots, n$ . При этом реакторы загружаются последовательно начиная с первого, в порядке возрастания их номеров, и циклически, то есть после последнего реактора  $n$  загружается первый и т. д. Процесс варки для каждого реактора можно разбить на следующие этапы: загрузка, химические превращения, выгрузка, простой с целью осмотра. Последовательное осуществление этих этапов назовем стадией с номером  $k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Выделим этап химических превращений как управляемый с помощью изменения параметров температурно-временного режима. Остальные этапы будут полагаться неуправляемыми.

Пусть,  $\Delta_{3k}^i = [t_{3k-2}^i; t_{3k-1}^i]$ ,  $\Delta_{nk}^i = [t_{3k-1}^i; t_{3k}^i]$ ,  $\Delta_{pk}^i = [t_{3k}^i; t_{3k+1}^i]$ ,  $\Delta_{ok}^i = [t_{3k+1}^i; t_{3k+2}^i]$  – промежутки времени, в течение которых в  $i$ -м реакторе происходят  $k$ -е этапы загрузки (з), химических превращений (п), разгрузки (р), простоя (останова) (о), соответственно,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . При этом промежутки  $\Delta_{3k}^i$ ,  $\Delta_{pk}^i$ ,  $\Delta_{ok}^i$  рассматриваются как независимые от управления и полагаются постоянными. Возникает задача управления этапами химических превращений таким образом, чтобы не происходило выхода на разгрузку более одного реактора одновременно. Иначе говоря, надо так управлять процессом, чтобы выполнялись условия

$$\Delta_{pk}^i \cap \Delta_{pk}^{i+m} = \emptyset, \quad \Delta_{p(k+1)}^i \cap \Delta_{pk}^{i+m} = \emptyset, \quad (1)$$

где  $m = 1, 2, \dots, n-i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Первое условие (1) запрещает одновременную разгрузку для реакторов, находящихся на

одной,  $k$ -й, стадии, второе – для случая, когда реакторы с меньшими номерами уже вышли на следующую,  $(k + 1)$ -ю, стадию, а реакторы с большими номерами еще находятся на предыдущей,  $k$ -й, стадии. Фактически надо за счет регулирования допустимого времени варки обеспечить выполнение условий (1). Назовем режим функционирования группы реакторов безопасным, если не происходит одновременная разгрузка более одного реактора.

Моделируемый процесс имеет циклический характер. Введем вектор структуры  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  следующим образом [4]:  $\gamma_i(t) = 1$ , если  $i$ -й реактор находится в стадиях осмотра, загрузки и химических превращений;  $\gamma_i(t) = 0$ , если  $i$ -й реактор находится в стадии разгрузки. Тогда безопасному режиму соответствует вектор структуры, имеющий в каждый момент времени не более одной нулевой компоненты. При этом происходит последовательный переход от структуры, у которой  $\gamma_i = 0$ , к структуре с  $\gamma_{i+1} = 0$  и от  $\gamma_n = 0$  к  $\gamma_1 = 0$ . Данную систему можно отнести к классу циклических гибридных систем [5], [6].

Перейдем к конкретизации модели. Будем полагать, что динамика химических превращений в  $i$ -м неизотермическом реакторе периодического действия в безразмерных переменных на  $k$ -й стадии задается уравнениями [1]

$$\dot{x}_i = -x_i e^{\frac{1}{y_i}}, \dot{y}_i = x_i e^{\frac{1}{y_i}} + \mu_i (y_{i0} - y_i), \quad (2)$$

где  $x_i, y_i, \mu_i, y_{i0}$  – концентрация реагента, температура, коэффициент теплопередачи, температура стенки соответственно в  $i$ -м реакторе. Процесс варки в  $i$ -м реакторе продолжается до тех пор, пока концентрация реагента не станет меньше некоторой пороговой величины  $c_i > 0$ . Но условие  $x_i - c_i = 0$  может оказаться «ложным» сигналом окончания процесса варки вследствие неточности измерений, неопределенности параметров, возмущающих воздействий. Учитывая эти обстоятельства, предлагается придать решению об окончании процесса варки инерционный, позволяющий избежать поспешности характер. Для этого введем переменные  $z_i$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{z}_i = z_i - c_i. \quad (3)$$

Процесс варки в  $i$ -м реакторе предлагается прекращать в тот момент времени, когда выполнится условие  $z_i = d_i$ , где  $d_i$  – заданная постоянная, то есть в момент времени  $t_i$  такой, что

$$z_i(t_i) = z_{i0} + \int_{t_{i0}}^{t_i} (x_i - c_i) dt = d_i, \quad (4)$$

где  $z_{i0} = z_i(t_{i0})$ ,  $t_{i0}$  – начальный момент времени для этапа химических превращений. Полагаем, что  $z_{i0} > d_i > 0$ . При достижении переменной  $z_i$  значения  $d_i$  процесс варки прекращается, и реактор выходит на разгрузку. Смысл этого условия состоит в следующем. В начальный момент времени  $t_{i0}$  полагаем  $z_{i0} = z_i(t_{i0}) > d_i$ . Далее в силу пер-

вого уравнения системы (2) переменная  $x_i(t)$  убывает к нулю, и с некоторого момента времени разность  $x_i - c_i$  станет и останется отрицательной. Тогда переменная  $z_i$  также будет убывать (к  $-\infty$ ) и достигнет значения  $d_i$ . Наличие интеграла обеспечивает инерционность при принятии решения о завершении стадии химических превращений. Таким образом, уравнения (2) задают динамику химических превращений в  $i$ -м реакторе при условии  $z_i > d_i$ . В тот момент времени, когда  $z_i = d_i$ , эта стадия заканчивается и начинается разгрузка.

#### УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ БЕЗОПАСНОГО РЕЖИМА

Рассмотрим  $i$ -й реактор, то есть систему (2), (3), на некоторой стадии  $k$ . Найдем границы промежутка  $\Delta_{nk}^i$ , которые можно обеспечить за счет регулирования температурного режима на  $k$ -стадии. Пусть температура в реакторе постоянна:  $y_i = \bar{y}_i$ . Тогда из (2) получаем  $x_i(t) = x_{i0} e^{-a_i(t-t_{i0})}$ ,

где  $x_{i0} = x_i(t_{i0})$ ,  $a_i = e^{\frac{1}{\bar{y}_i}}$ . При этом закон изменения хладагента имеет вид  $y_{i0} = \bar{y}_i - \frac{a_i x_i(t)}{\mu_i}$ . Далее из (3) получаем:

$$z_i(t) = z_{i0} - \frac{x_{i0}}{a_i} \cdot (e^{-a_i(t-t_{i0})} - 1) - c_i(t-t_{i0}).$$

Пусть  $t_i$  – первый момент времени, в который  $z_i(t_i) = d_i$ . В этот момент заканчивается процесс варки и начинается разгрузка котла. Найдем границы изменения  $t_i$  при условии, что температура в реакторе удовлетворяет технологическим ограничениям:  $\bar{y} \in [y_{imin}; y_{imax}]$ .

Пусть  $t_i(a_i)$  – функция, определяемая уравнением

$$z_{i0} - \frac{x_{i0}}{a_i} \cdot (e^{-a_i(t_i-t_{i0})} - 1) - c_i(t_i - t_{i0}) = d_i. \quad (5)$$

*Лемма.* Решение  $t_i$  уравнения (5) единственно при всех допустимых значениях параметров. При этом  $t_i = t_i(a_i)$  – убывающая функция.

*Доказательство.* Для простоты обозначим  $a_i = a$ ,  $d_i = d$ ,  $c_i = c$ ,  $z_{i0} = z_0$ ,  $x_{i0} = x_0$ ,  $t_i - t_{i0} = t$ . Тогда (5) можно записать в виде

$$h(t) \equiv z_0 - d - ct - \frac{x_0}{a} (e^{-at} - 1) = 0. \quad (6)$$

Докажем единственность решения  $t$  уравнения (6). Имеем:  $\dot{h}(t) = -c + x_0 e^{-at}$ . Тогда если  $c \geq x_0$ , то  $\dot{h}(t) < 0$  при  $t \geq 0$ , и функция  $h(t)$  убывает. Если  $c < x_0$ , то  $\dot{h}(t)$  возрастает до максимума в точке  $t^* = \frac{1}{a} \ln \frac{c}{x_0}$ , а затем убывает. В обоих случаях, поскольку  $h(0) = z_0 - d > 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = -\infty$ , уравнение  $h(t) = 0$  имеет единственное решение.

Докажем убывание решения  $t(a)$  уравнения (6) как функции параметра  $a$ . Запишем (6) в виде  $z_0 - d - ct = \frac{x_0}{a} (e^{-at} - 1) \equiv q(t, a)$ . (7)

Пусть  $t(a_1), t(a_2)$  – решения уравнения (6) при  $a = a_1, a = a_2, a_1 > a_2$ . Легко показать, что  $\frac{dg}{da} > 0$  при  $t > 0$ . Тогда из (7) следует

$$z_0 - d - ct(a_1) = g(t(a_1), a_1) > g(t(a_2), a_2) = z_0 - d - ct(a_2),$$

откуда получаем, что  $t(a_1) < t(a_2)$ . Лемма доказана.

Поскольку  $y_i \in [y_{imin}, y_{imax}]$ ,  $a_i \in [a_{imin}, a_{imax}]$ , где  $a_{imin}, a_{imax}$  – значения параметра  $a$ , соответствующие  $y_{imin}, y_{imax}$ . Тогда решение  $t_i(a_i)$  уравнения (5) в силу леммы удовлетворяет условию

$$t_i(a_{imax}) \leq t_i(a_i) \leq t_i(a_{imin}). \quad (8)$$

Пусть  $t_{i0}^k$  – время начала стадии химических превращений в  $i$ -м реакторе на  $k$ -й стадии;  $\Delta^+$  – время, затрачиваемое на осмотр и загрузку реактора;  $\Delta^-$  – время, затрачиваемое на разгрузку реактора. Полагаем, что  $\Delta^+, \Delta^-$  одинаковы для всех реакторов на всех стадиях, что не уменьшает общности дальнейших рассуждений. Пусть  $k$ -я стадия для  $i$ -го реактора начинается в момент времени  $t_{i0}^k - \Delta^+$ , а заканчивается в момент времени  $t_{i0}^k + \Delta^-$ , где  $t_{i0}^k$  – время окончания этапа химических превращений. Для безопасного функционирования системы реакторов, то есть для отсутствия ситуации одновременной разгрузки более одного реактора, достаточно, чтобы на  $k$ -й стадии реакторы с меньшими номерами разгрузались раньше, то есть чтобы выполнялись условия  $t_{i0}^k + \Delta^- < t_{i+1}^k, i = 1, \dots, n - 1$ , а реакторы с меньшими номерами, вышедшие на  $(k + 1)$ -стадию, должны разгружаться позже реакторов, находящихся на  $k$ -й стадии, что равносильно условиям  $t_{j+1}^k + \Delta^- < t_j^{k+1}, j = 1, \dots, n - 1$ ,

Будем обозначать через  $x_{i0}^k, y_{i0}^k, \bar{y}_i^k, x_i^k, a_i^k$  значения величин через  $x_{i0}, y_{i0}, \bar{y}_i, x_i, a_i$  соответственно на  $k$ -й стадии. Тогда из предыдущих рассуждений получаем следующий результат.

**Теорема.** Пусть система неравенств

$$t_i^k(a_{imax}) \leq t_i^k \leq t_i^k(a_{imin}), t_j^k + \Delta^- < t_{j+1}^k, \\ i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, N, j = 1, \dots, n - 1, \\ t_{j+1}^k + \Delta^- < t_j^{k+1}, j = 1, \dots, n - 1, k = 1, 2, \dots, N - 1$$

имеет решение  $t_1^k, \dots, t_n^k$ . Тогда группа периодических реакторов, объединенных в технологическую линию, будет иметь безопасный режим функционирования, который можно поддержи-

вать с помощью управления  $y_{i0}^k = \bar{y}_i^k - \frac{a_i^k x_i^k(t)}{\mu_i}$ .

**Устойчивость.** Найдем условия устойчивости решения  $\bar{x}_i = x_i(t) = x_{i0} e^{-a_i(t-t_{i0})}, y_i = \bar{y}_i$  системы (2). В соответствии с [1], где в качестве функции Ляпунова была взята квадратичная форма, достаточные условия асимптотической устойчивости решения, реализующего изотермический режим в реакторе, состоят в существовании таких постоянных  $\alpha, \beta$ , что

$$p\alpha^2 + 2q\alpha\beta + r\beta^2 < 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (9)$$

$$\text{где } p = \frac{a_i \bar{x}_i^2}{\bar{y}_i^2}, q = \frac{a_i \bar{x}_i}{\bar{y}_i^2} - 2\mu_i, r = \frac{a_i}{\bar{y}_i^2}.$$

При этом неясно, могут ли условия (9) выполняться одновременно, поэтому продолжим исследование устойчивости. Для выполнения первого условия (9) достаточно, чтобы одновременно были справедливы неравенства

$$q^2 - pr \geq 0, -q + \sqrt{q^2 - pr} > 0,$$

что равносильно выполнению неравенств  $q < 0, q^2 - pr \geq 0$ .

Отсюда получаем, что  $\mu_i \geq x_{i0} \bar{y}_i^2 \cdot e^{-\frac{1}{y_i}}$ . Поскольку, как нетрудно показать, правая часть последнего неравенства, как функция от  $\bar{y}_i$ , имеет глобальный максимум при  $\bar{y}_i = 1$ , достаточным условием для выполнения последнего неравенства является  $\mu_i > x_{i0} \cdot e^{-1}$ .

## ВЫВОДЫ

Предложен подход к решению задачи управления группой варочных реакторов. Предложена соответствующая математическая модель, основанная на системе с переменной структурой. При этом учитывается динамика процесса варки, для описания которой использованы простейшие уравнения. В дальнейшем следует разработать алгоритм управления, включающий в динамическую систему большее число параметров процесса варки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтер Б. В., Сальников И. Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М.: Химия, 1981. 200 с.
2. Зорин И. Ф., Петров В. П., Роговская С. А. Управление процессами целлюлозно-бумажного производства. М.: Лесн. пром-сть, 1981. 272 с.
3. Казанский В. Н., Зорин И. Ф., Петров В. П. Централизованное управление группой периодических варочных реакторов // Автоматизация, механизация, приборное и аппаратурное оформление процессов целлюлозно-бумажного производства: Сб. тр. ВНИИБ. Вып. 71. Л., 1977. С. 18–24.
4. Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
5. Branicky M. S., Borkar V. S., Mitter S. K. A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. 43. № 4. P. 475–482.
6. Nerode A., Kohn W. Models for Hybrid Systems: Automata, Topologies, Controllability, Observability // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. 1993. № 736. P. 317–356.

НИНА ВЛАДИМИРОВНА ПЛАКСИНА

аспирант кафедры теории вероятностей и анализа данных  
 математического факультета, Петрозаводский государственный университет  
 plaksina\_nv@mail.ru

## РАВНОВЕСНЫЕ ЦЕНЫ ДЛЯ ПРОВАЙДЕРОВ В СИСТЕМЕ С ОЧЕРЕДЯМИ

Статья посвящена исследованию модели системы очередей. В модели предполагается существование двух подсистем М/М/1 и предоставление двух разных сервисов (продуктов). Эти сервисы являются дополнительными, и пользователю нет смысла получать только один из них. В статье определены равновесные цены и доходы провайдеров в зависимости от времени обслуживания.

Ключевые слова: теория игр, теория очередей, дополнительный продукт, равновесные цены

### ВВЕДЕНИЕ

Конкуренция среди сервисов, предлагающих свои услуги, является предметом исследования в ряде работ, например [3]. Модель, описывающая такую ситуацию, состоит из двух этапов. Сначала для любого множества цен, установленных провайдерами, пользователи выбирают сервисы согласно какому-то правилу. Учитывая эту информацию, провайдеры назначают цены, и достигается равновесие [2].

В данной работе проведено исследование «системы очередей с дополнительной услугой», в которой у одного из провайдеров появляется конкурент, то есть у пользователей возникает возможность выбора. В этом состоит отличие от рассмотренной ранее модели [4].

В качестве примера к задаче рассмотрен парковочный сервис. Пользователь паркует свою машину на стоянке, чтобы затем воспользоваться услугами другого сервиса. Согласно этому примеру, провайдер, который предоставляет место на парковке, – «parking-provider» (далее – «парковщик»), а другой – «service-provider» (далее – «сервис»). Схематически данная модель представлена на рисунке.

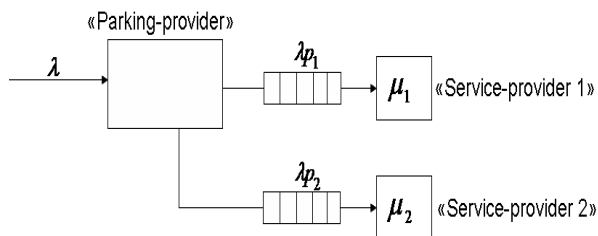


Схема поступления заявок в систему

Здесь  $\lambda$  – интенсивность входного потока пользователей,  $\mu$  – время обслуживания отдельного требования,  $p_1$  – вероятность того, что пользователь решит воспользоваться услугами первого сервиса,  $p_2$  – второго,  $p_1 + p_2 = 1$ .

В работе исследуется равновесное решение модели. Проведен анализ двух ценовых ситуаций и изменений доходов провайдеров в них. Также определены критерии, которые влияют на выбор пользователя.

### МОДЕЛЬ

Будем рассматривать случай, когда провайдеры хотят максимально увеличить свою прибыль. Когда пользователь прибывает в систему, он решает, услугами какого сервиса ему воспользоваться. Если ожидаемый доход пользователя больше нуля, провайдеры увеличивают цены (чтобы при этом количество пользователей не сократилось) до тех пор, пока этот доход не станет равным нулю.

Прежде чем приступить к решению задачи, введем некоторые предположения.

1. Стационарный Пуассоновский поток пользователей с параметром  $\Lambda$  прибывает на серверную станцию. Все пользователи идентичны, различно только время их прибытия.  $\Lambda$  – интенсивность, которая необходима для того, чтобы сервис существовал, это необязательно действительная интенсивность входного потока пользователей (которая дальше будет определена как  $\lambda$ ).

2. Время обслуживания отдельного требования (заявки пользователя) – экспоненциально распределенная случайная величина с параметром  $\mu$ , независимая от совокупности моментов событий входящего потока и времен обслуживания других требований.

3. При удачном завершении сервиса каждый пользователь получает доход  $R$  (доход выражается в денежных единицах).

4. Стоимость единицы времени пребывания в системе для пользователя равна  $C$ .

5. У пользователей нет предпочтений при выборе провайдера. Их цель – сократить расходы при получении сервиса.

6. Предполагается, что пользователь решает присоединиться к очереди или нет, если никто

другой не присоединяется (когда он платит только за время своего обслуживания), то есть  $R \geq \frac{C}{\mu}$ .

7. Когда пользователь хочет получить сервис, он не знает размер очереди. Решение о том, присоединиться к очереди или нет, он принимает безвозвратно.

Будем рассматривать систему, которая состоит из двух подсистем М/М/1 [1]. Эта система с неограниченной очередью, все заявки обслуживаются в порядке поступления.

Используем следующие обозначения:  $\lambda$  – интенсивность входного потока,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda p_1$ ,  $\lambda_2 = \lambda p_2$ ;  $\lambda^*$  – естественное равновесие;  $i$  – номер сервиса,  $i = 1, 2$ ;  $\omega_i = \omega_i(\lambda_i)$  – ожидаемое время пребывания пользователя в системе, учитывая интенсивность поступления  $\lambda_i$ ,  $\omega_i = \frac{1}{\mu - \lambda_i}$ ;  $P_{Si}$  –

цена, назначенная сервисом  $i$ ;  $P_N$  – цена за 1 минуту, назначенная парковщиком;  $U$  – ожидаемая прибыль присоединившегося пользователя, воспользовавшегося сервисом  $i$ ,  $U = R - P_{Si} - \omega_i P_N - \omega_i C$ ;  $\pi_{Si}$  – ожидаемая прибыль за единицу времени для сервиса  $i$ ,  $\pi_{Si} = \lambda_i P_{Si}$ ;  $\pi_N$  – ожидаемая прибыль за единицу времени для парковщика,  $\pi_N = (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) P_N$ .

Далее рассмотрим модель с фиксированным значением  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ . Разберем два случая: симметричный, когда значение  $\mu$  одинаково для обоих сервисов, и несимметричный, когда это значение различно.

### СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть  $\lambda^* = 2 \left( \mu - \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}} \right) \leq \Lambda$ . Если  $\lambda^* > \Lambda$ , то часть заявок не будет обслужена и покинет систему.

#### Теорема 1.

Существует единственное положение равновесия, где  $\lambda = \lambda^*$ ,

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{\mu(1-2p_1) + 2p_1 \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}}}, P_{S1} = P_{S2} = R - \sqrt[3]{\frac{CR^2}{\mu}},$$

$$P_N = \sqrt[3]{\mu C^2 R} - C, \pi_{S1} = \pi_{S2} = 2p_1 \left( \sqrt{R\mu} - \sqrt[6]{RC^2 \mu} \right)^2,$$

$$\pi_N = \frac{4p_1 \left( \sqrt[3]{\mu C^2 R} - C \right)}{\mu(1-2p_1) + 2p_1 \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}}}.$$

*Доказательство.* В равновесии для пользователей должно быть выполнено:

$$R = P_{Si} + \omega_i P_N + \omega_i C \text{ или } R = P_{Si} + (P_N + C) \frac{1}{\mu - \lambda p_i},$$

где  $i = 1, 2$ . Отсюда можно выразить интенсивность входного потока через цены на обслуживание клиентов:

$$\lambda p_i = \mu - \frac{P_N + C}{R - P_{Si}}. \quad (1)$$

Заметим, что для того чтобы  $\lambda p_i \geq 0$ , должно выполняться условие:  $\mu P_{Si} + P_N \leq \mu R - C$ . Несложно проверить, что выполнение данного условия для равновесных цен (6) и (7) эквивалентно предположению 6.

Используя (1) и определения  $\pi_{S1}$ ,  $\pi_{S2}$ ,  $\pi_N$ , получим:

$$\pi_{Si} = \lambda p_i P_{Si} = P_{Si} \left( \mu - \frac{P_N + C}{R - P_{Si}} \right) \quad (2)$$

и

$$\pi_N = (\lambda p_1 \omega_1 + \lambda p_2 \omega_2) P_N = P_N \left[ \left( \mu - \frac{P_N + C}{R - P_{S1}} \right) \frac{R - P_{S1}}{P_N + C} + \left( \mu - \frac{P_N + C}{R - P_{S2}} \right) \frac{R - P_{S2}}{P_N + C} \right]. \quad (3)$$

Максимизируем  $\pi_{Si}$  по отношению к  $P_{Si}$  и  $\pi_N$  по отношению к  $P_N$ , получаем стратегии

$$P_{S1} = P_{S2} = R - \sqrt{\frac{R}{\mu} (P_N + C)} \quad (4)$$

и

$$P_N = \sqrt{\frac{C\mu}{2} (2R - P_{S1} - P_{S2})} - C. \quad (5)$$

$$\text{Стратегии } P_{S1} = P_{S2} = R + \sqrt{\frac{R}{\mu} (P_N + C)},$$

$P_N = -\sqrt{\frac{C\mu}{2} (2R - P_{S1} - P_{S2})} - C$  не удовлетворяют условиям задачи.

Получаем

$$P_{S1} = P_{S2} = R - \sqrt[3]{\frac{CR^2}{\mu}} \quad (6)$$

и

$$P_N = \sqrt[3]{\mu C^2 R} - C. \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что  $\pi_{S1}$ ,  $\pi_{S2}$ ,  $\pi_N$  принимают максимальные значения в  $P_{S1}$ ,  $P_{S2}$ ,  $P_N$  соответственно. Подставляя (6) и (7) в уравнения (1)–(3), получаем:

$$\lambda p_1 = \lambda p_2 = \mu - \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}}, \quad p_1 = p_2.$$

Соответственно:

$$\lambda = \lambda p_1 + \lambda p_2 = 2 \left( \mu - \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}} \right), \quad (8)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2p_1 \left( \mu - \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}} \right),$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{\mu(1-2p_1) + 2p_1 \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}}}, \quad (9)$$

$$\pi_{S1} = \pi_{S2} = 2p_1 \left( \sqrt{R\mu} - \sqrt[6]{RC^2 \mu} \right)^2, \quad (10)$$

$$\pi_N = \frac{4p_1(\sqrt[3]{\mu C^2 R} - C)}{\mu(1 - 2p_1) + 2p_1 \sqrt[3]{\frac{\mu^2 C}{R}}}. \quad (11)$$

Полученные результаты показывают, что на стоимость услуг сервисов никак не влияют  $p_1, p$ . Значение  $p_i$  влияет только на конечную прибыль сервисов.

Для парковщика выгодно появление второго сервиса, так как увеличивается количество пользователей в системе, соответственно, доход парковщика также растет. Пользователям это также выгодно, так как у них появляется возможность выбора, а время их пребывания в системе может сократиться. При этом большее количество пользователей могут воспользоваться услугами.

### НЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Допустим, что интенсивность обработки заявок у сервисов различна. Посмотрим, как изменится стоимость услуг в данном случае.

$$\text{Пусть } \lambda^* = \mu_1 + \mu_2 - \sqrt[3]{\frac{C}{2R} [\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^3} \leq \Lambda.$$

#### Теорема 2.

Существует единственное положение равновесия, где  $\lambda = \lambda^*$ ,

$$\omega_i = \frac{1}{\mu_i - p_i \left( \mu_1 + \mu_2 - \sqrt[3]{\frac{C}{2R} [\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^3} \right)},$$

$$P_N = \sqrt[3]{\frac{C^2}{4} [\sqrt{\mu_1 R} + \sqrt{\mu_2 R}]^2} - C,$$

$$P_{Si} = R - \sqrt{\frac{R}{\mu_i}} \sqrt[3]{\frac{C^2}{4} [\sqrt{\mu_1 R} + \sqrt{\mu_2 R}]^2}.$$

$$\pi_{Si} = p_i \left[ R - \sqrt{\frac{R}{\mu_i}} \sqrt[3]{\frac{C^2 R}{4} [\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^2} \right] \times \\ \times \left( \mu_1 + \mu_2 - \sqrt[3]{\frac{C}{2R} [\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^3} \right),$$

$$\pi_N = \left[ \sqrt[3]{\frac{RC^2}{4} [\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^2} - C \right] \times \\ \times \left[ -2 + \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{\mu_i - p_i \left( \mu_1 + \mu_2 - \sqrt[3]{\frac{C}{2R} [\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^3} \right)} \right].$$

Доказательство теоремы 2 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1. Разница в том, что теперь у каждого сервиса свое время обслуживания отдельного требования, то есть в данном случае  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

Полученные результаты подтверждают, что на стоимость услуг значительно влияет интенсивность обработки заявок; чем выше это значение, тем стоимость услуг у сервисов выше, и наоборот. Соответственно, и доход сервисов может возрасти, если количество пользователей не сократится. Доходы парковщика не уменьшатся в силу того, что количество пользователей возрастет. Стоимость услуг парковщика может сократиться в силу изменения количества пользователей. Однако первому сервису невыгодно появление конкурента, так как теперь, чтобы поток пользователей не сократился, необходимо или понижать цену, или наращивать мощность сервера. При этом доход сервиса теперь зависит от мощности сервера конкурента, а борьба за цены разворачивается между тремя провайдером. Это не всегда бывает выгодно сервису.

У пользователей появляется возможность выбора: либо пользоваться услугами более дорогого сервиса, либо более дешевого, но при этом больше платить парковщику. Однако распределение пользователей по каналам  $p_1, p_2$  по-прежнему не влияет на уровень цен. Значение  $p_i$  влияет только на конечную прибыль сервисов; чем выше это значение, тем выше их доход. Причем в зависимости от величины  $p_i$  прибыль сервиса  $i$  может быть как больше, так и меньше, чем в условиях монополии [4]. Однако в таком случае очередь из пользователей возрастает, увеличивается время обслуживания и нагрузка на сервер также растет.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было проведено исследование модели конкурентной борьбы между сервисами. Рассмотрены две ценовые ситуации и определено, как выбор пользователей зависит от стоимости услуг провайдеров. Также найдены равновесные цены для сервисов и, соответственно, их доходы. Проведено сравнение полученных результатов с моделью без конкуренции; подтверждено, что появление второго сервиса выгодно пользователям и невыгодно первому сервису.

### БЛАГОДАРНОСТЬ

Выражаю благодарность профессору В. В. Мазалову за постановку задачи и помощь при подготовке статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Высш. шк., 1982. 256 с.
2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. М.: Высш. шк., 1998. 304 с.
3. Hassin R., Haviv M. Equilibrium of Customers Behavior in Queueing Systems: To Queue or Not to Queue. Boston: Kluwer, 2003.
4. Veltman A., Hassin R. Equilibrium in Queueing Systems with Complementary Products // Queueing Systems, Netherlands: Springer Science + Business Media, 2005. P. 325–342.