

ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ СЫСУН

доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроэнергетики и электроники физико-технического факультета, Петрозаводский государственный университет
vsysun@psu.karelia.ru

ВЛАДИМИР СТАНИСЛАВОВИЧ ИГНАХИН

аспирант кафедры электроники и электроэнергетики физико-технического факультета, Петрозаводский государственный университет
art101@mail.ru

К РАДИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИОННОГО ТОКА НА ЗОНД: I. УЧЕТ ОБЪЕМНОЙ ИОНИЗАЦИИ

В настоящей работе рассматривается ионный ток на сферический и цилиндрический зонды с учетом ионизации в области возмущения плазмы. В предположении нулевой температуры ионов (приближение радиального дрейфа) получено выражение для ионной концентрации с учетом генерации ионов. Вычислены вольт-амперные характеристики зондов для широкого диапазона параметров (размер зонда, частота ионизации). Получены аппроксимирующие выражения для зависимостей плотности ионного тока на зонд от частоты ионизации.

Ключевые слова: зондовая диагностика, плазма низкого давления, радиальная теория, область возмущения, объемная ионизация

ВВЕДЕНИЕ

Радиальная теория ионного тока на зонд в плазме низкого давления впервые была предложена в работе [8] и развивалась в последующем в [9], [13], [15], [17]. Приближение радиального дрейфа наиболее применимо в том случае, когда ионная температура T_i близка к нулю (ионы обладают незначительным моментом количества движения) и выполняется приближение бесстолкновительного движения. При этом даже редкие столкновения ионов с атомами разрушают орбитальное движение частиц и сильно влияют на величину ионного тока [1], [7]. Вследствие этого радиальная теория дает лучший результат при наличии столкновений, чем более строгая орбитальная теория [11], [16].

В радиальной теории пренебрегается орбитальным моментом ионов (полагается $T_i / T_e = 0$, где T_e – температура электронов), которые движутся радиально со скоростями, определяемыми локальным потенциалом и законом сохранения энергии. В этом случае возможно численное решение уравнения Пуассона без разбиения на области квазинейтральной плазмы и слоя [8]. Ионный ток задается на бесконечности, а ионизацией в объеме пренебрегается. Концентрация электронов предполагается распределенной по бoльцмановскому закону $n_e = n_0 \exp(\frac{e\varphi}{kT_e})$, где n_0 – концентрация невозмущенной плазмы. Тогда уравнение Пуассона для цилиндрического и сферического случаев соответственно запишется:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[\frac{I_3}{2\pi l_s e \sqrt{-2e\varphi/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[\frac{I_3}{4\pi r^2 e \sqrt{-2e\varphi/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \right]. \quad (2)$$

При заданном ионном токе I_3 эти уравнения интегрировались численно [9], [13] при граничных условиях: $r \rightarrow \infty$, $n \rightarrow n_0$, $\varphi \rightarrow 0$, $d\varphi/dr \rightarrow 0$ для отношений радиуса зондов к электронному дебаевскому радиусу $\frac{r_s}{\lambda_D} \geq 0,25$ – цилиндр и $\frac{r_s}{\lambda_D} \geq 0,05$ – сфера. В [15] рассчитывался плавающий потенциал сферического зонда в широком диапазоне $10^{-4} \leq \frac{r_s}{\lambda_D} \leq 10^4$ для аргона и гелия, но вольт-амперные характеристики не рассчитывались.

Отсутствие учета объемной ионизации в радиальной теории требует увеличения области возмущения до бесконечности, в противном случае вся плазма конечных размеров уйдет на зонд. Кроме влияния на ионный ток конечное значение области возмущения плазмы зондом определяет пространственное разрешение метода. Ионизация в объеме учитывается в работах по пристеночному потенциалу, когда стенка интерпретируется как большой зонд. В основополагающей работе Тонкса и Ленгмюра [18] получено уравнение «плазма-слой»:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{z}{r^\alpha} \int_0^r \frac{r'^{\alpha} n_0 \exp(\frac{e\varphi(r')}{kT_e}) dr'}{\sqrt{2e(\varphi(r') - \varphi(r))/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi(r)}{kT_e}\right) \right\}, \quad (3)$$

здесь z – частота ионизации, производимой одним электроном, $\frac{r'^{\alpha}}{r^\alpha} z n_e(r') dr'$ – плотность потока ионов в точке r , родившихся в элементе dr' , где $\alpha = 0$ – плоский случай, $\alpha = 1$ – цилиндрический случай, $\alpha = 2$ – сферический случай.

Численные расчеты выполнены для области квазинейтральной плазмы, где принималось $n_i = n_e$. Результаты [18] показали, что учет генерации ионов приводит к возрастанию потенциа-

ла и средней скорости ионов на границе плазмы и уменьшению ионного тока на слой. Это отклонение от случая отсутствия генерации при внешней стенке возрастает с переходом от плоской к цилиндрической и далее к сферической геометрии. Впоследствии результаты [18] уточнялись в [10], [12], [14].

В [6] рассмотрен учет объемной ионизации в радиальной теории при конечной области возмущения плазмы "r₀". Применено уравнение «плазма-слой» Ленгмюра (3) для ионного тока, но с иными граничными условиями: на внешней границе r = r₀ принималось φ = 0, $\frac{d\varphi}{dr} = 0$. В работе определяли зависимости плавающего потенциала зонда (пылевой частицы в плазме) и связанного с ней значения r₀ / λ₀ от частоты ионизации. Столкновения с атомами не учитывались.

В настоящей работе рассматривается ионный ток на сферический и цилиндрический зонды с учетом ионизации в приближении холодных ионов. Вычислены вольт-амперные характеристики для безразмерных параметров r₃ / λ₀ = 0,0001 ÷ ÷ 10, A = z / ω_i = 0,02 ÷ 5, где ω_i – ионная плазменная частота.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА

Пусть r₀ – область возмущения плазмы. В [2], [4] область возмущения определяется объемом плазмы вокруг зонда, в котором при пренебрежении объемной рекомбинацией число образующихся в единицу времени ионов за счет ионизации равно току на зонд. Для холодных ионов в радиальной теории это определение соответствует нулевой дрейфовой скорости ионов на границе области возмущения. В единице объема за единицу времени образуется n_e z ионов. При этом все ионы, поступающие на зонд, создаются внутри r₀. Ионы, образовавшиеся вне r₀, уходят на стенку и электроды. Этот уход и определяет частоту ионизации, производимую одним электроном, z ~ $\frac{j_{cm} S_{cm}}{N}$, где N – полное число электронов в объеме, j_{cm}, S_{cm} – плотность ионного тока на стенку и площадь стенки.

Рассмотрим формирование потока ионов на зонд внутри r₀. На элементе пути иона dr' образуется доля новой плотности тока:

$$dj = en_e(r')zdr'. \quad (4)$$

Все ионы доли плотности тока (4) будут иметь скорость $\sqrt{\frac{2e}{M}[\varphi(r') - \varphi(r)]}$. Разделив долю потока на скорость, получим долю концентрации dn'. Полные концентрация и плотность тока в точке r будут равны

$$n(r) = \frac{1}{r^\alpha} \int_r^{r_0} \frac{r'^\alpha n_e(r')zdr'}{\sqrt{\frac{2e}{M}[\varphi(r') - \varphi(r)]}}, \quad j(r) = \frac{e}{r^\alpha} \int_r^{r_0} n_e(r')zr'^\alpha dr'. \quad (5)$$

Введем безразмерные параметры:

$$x = \frac{r}{\lambda_0} = \frac{re}{\sqrt{\varepsilon_0 k T_e / n_0}}; \quad U = \frac{e\varphi}{k T_e}; \quad n' = \frac{n}{n_0}; \quad A = \frac{z\lambda_0}{\sqrt{k T_e / M}} = \frac{z}{\omega_i};$$

$j' = \frac{j}{en_0 \sqrt{k T_e / M}}$, здесь ω_i – плазменная ионная частота, j – плотность тока, λ₀ – электронный дебаевский радиус.

Подставляя выражение (5) в уравнение Пуассона при больцмановском распределении концентрации электронов, получим в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{x} \frac{\partial U}{\partial x} = \exp(U(x)) - \frac{A}{x^\alpha} \int_x^{x_0} \frac{x'^\alpha \exp(U(x')) dx'}{\sqrt{2[U(x') - U(x)]}}. \quad (6)$$

Решение (6) от границы области возмущения затруднено нулевыми начальными условиями для потенциала и его градиента. В [6] для начального от границы тонкого слоя, считающегося плоским, Δx << x₀ = x_N получено приближенное аналитическое решение в предположении n'_e = 1; n'_N = const:

$$U(x) = (1 - n'_N) \frac{(x_N - x)^2}{2}, \quad (7)$$

$$n'_N = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B}{27} + \frac{B^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B}{27} + \frac{B^2}{4}}}, \quad (8)$$

где B = $\frac{A^2 \pi^2}{4}$. Однако при распространении решений (7, 8) на достаточно толстый слой плазмы, особенно при больших x_N, где x'_N → 1, возникают неустойчивости счета. Ввиду этого методом последовательных приближений решение (7) было уточнено:

$$U(x) = (1 - n'_N) \frac{(x_N - x)^2}{2} (1 + \gamma \frac{x_N - x}{x_N}), \quad (9)$$

где γ = $\frac{1,363n'_N - 1}{1,818n'_N - 1,5}$ – для сферы и γ = $\frac{1,363n'_N - 1}{3,636n'_N - 3}$ – для цилиндра.

$$n'_{N-1} = n'_N \left[1 + \frac{h}{x_N} \left[1 - \frac{(2 + \gamma)}{\pi} \right] \right], \quad (10)$$

где h – шаг дискретизации координаты. Эти значения потенциала и концентрации принимались в первой от границы точке x_N – 1. Для нахождения потенциала в следующих промежуточных точках использовалась трехточечная параболическая интерполяция для значений U(x):

$$2U_x = 2U_j + a_j \left(\frac{x - x_j}{h} \right)^2 + b_j \frac{x - x_j}{h},$$

где a_j = U_j – 2U_{j+1} + U_{j+2}, b_j = –3U_j + 4U_{j+1} – U_{j+2}.

Далее на каждом шаге h использовалось разложение экспоненты в ряд exp U_x ≈ (1 + U_x – U_j) exp U_j и аналитические решения упрощенных таким образом интегралов.

Результаты расчетов приведены в виде графиков на рис. 1–5, a = r₃ / λ₀ – относительный размер зонда.

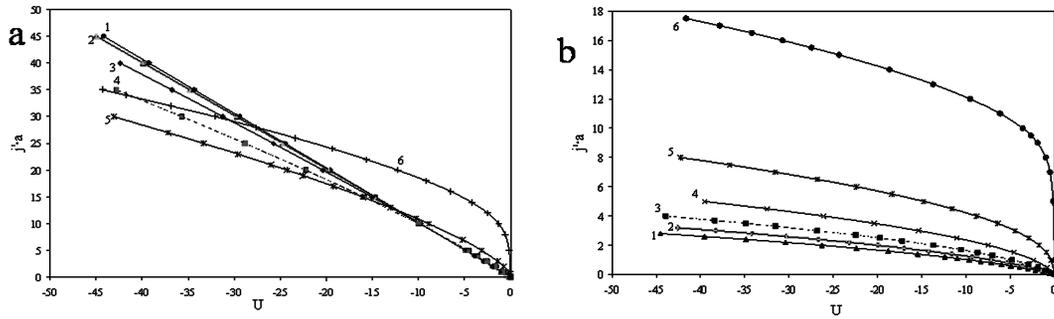


Рис. 1. Зависимости величины $j' \cdot a$ от безразмерного потенциала U в пренебрежении ионизацией (радиальная теория):
 а) сфера: 1 – $a = 0,0001$; 2 – $a = 0,001$; 3 – $a = 0,01$; 4 – $a = 0,1$; 5 – $a = 1,0$; 6 – $a = 10$;
 б) цилиндр: 1 – $a = 0,0001$; 2 – $a = 0,001$; 3 – $a = 0,01$; 4 – $a = 0,1$; 5 – $a = 1,0$; 6 – $a = 10$

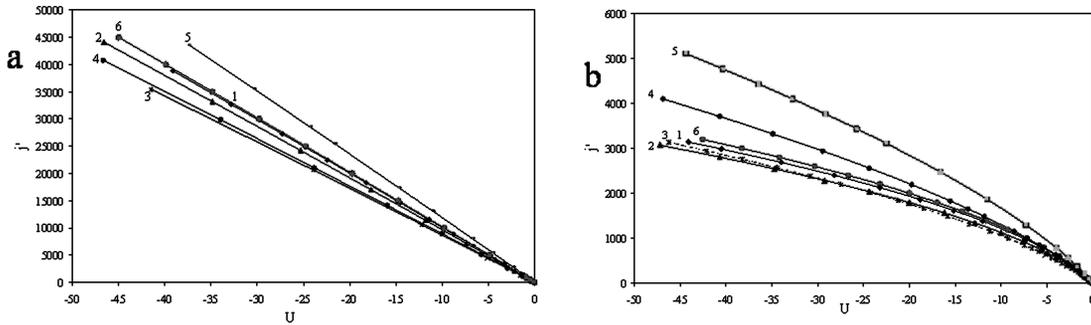


Рис. 2. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 0,001$:
 а) сфера: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 1$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации;
 б) цилиндр: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 2$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации

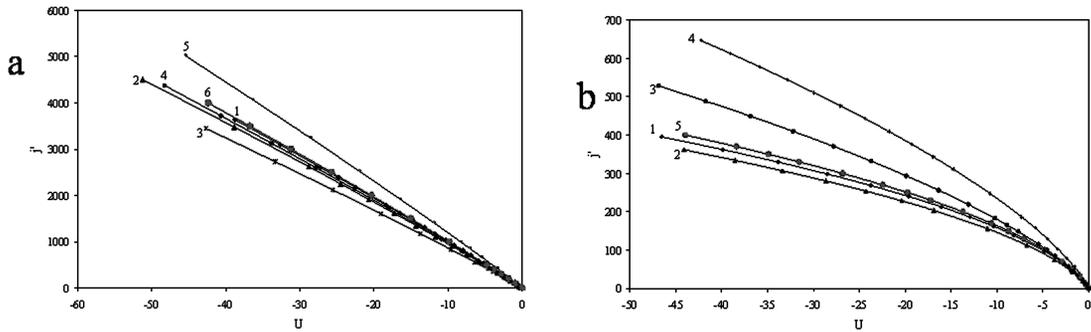


Рис. 3. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 0,01$:
 а) сфера: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 2$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации;
 б) цилиндр: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 2$; 4 – $A = 5$; 5 – радиальная теория без учета ионизации

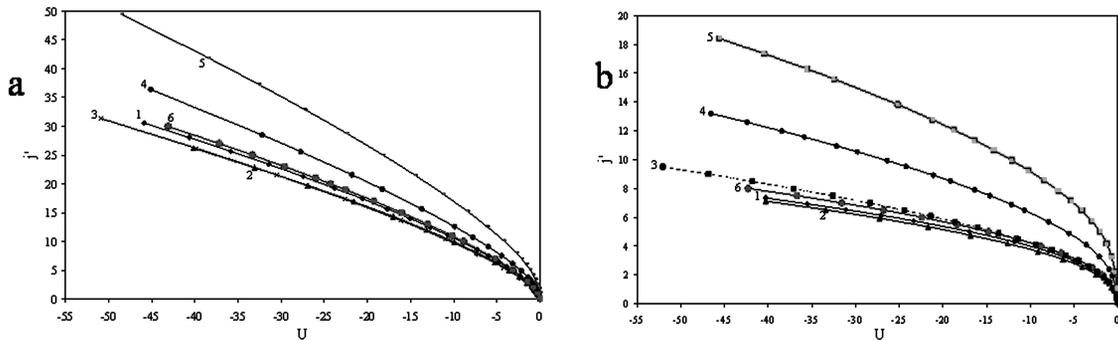


Рис. 4. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 1,0$:
 а) сфера: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 2$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации;
 б) цилиндр: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 2$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации

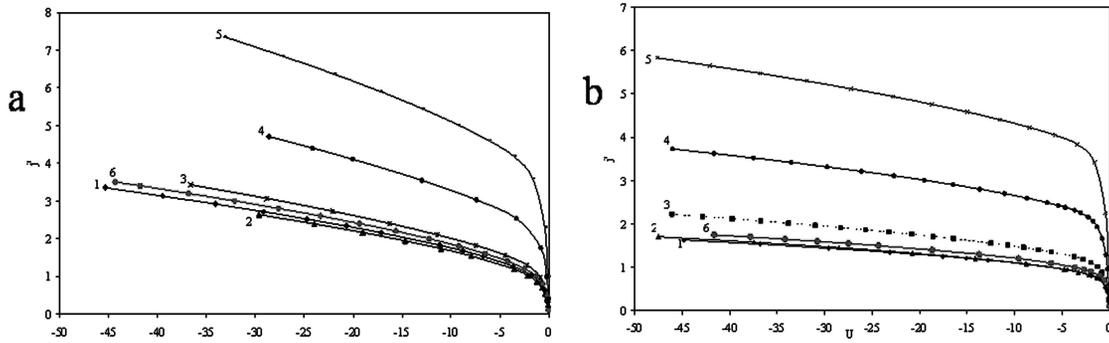


Рис. 5. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 10,0$:
 а) сфера: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 2$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации;
 б) цилиндр: 1 – $A = 0,02$; 2 – $A = 0,1$; 3 – $A = 0,5$; 4 – $A = 2$; 5 – $A = 5$; 6 – радиальная теория без учета ионизации

Для сравнения были проведены численные решения уравнений (1), (2) исходной радиальной теории без учета ионизации в расширенном диапазоне параметра $x = \frac{r}{\lambda_d}$, для чего использовались более точные аналитические начальные приближения для потенциала на больших расстояниях от зонда, учитывающие левые части уравнений (1), (2):

$$U = -\frac{c^2}{2x^2} \left(1 + \frac{c^2}{x^2} - \frac{4c^2}{x^4} + \frac{3c^4}{2x^4} \right), \quad c = x_3 j'_3, \quad (11)$$

$$U = -\frac{c^2}{2x^4} \left(1 + \frac{c^2}{x^4} - \frac{12c^2}{2x^6} + \frac{3c^4}{2x^8} \right), \quad c = x_3^2 j'_3. \quad (12)$$

В [8], [9], [13] использовался только первый член в суммах, что соответствует нулевым левым частям уравнений (1), (2). Следует отметить, что расширение расчетных данных для малых $\frac{r_3}{\lambda_0}$ является актуальным для диагностики сильноразреженной плазмы. Помимо этого зондовая теория применяется для описания процессов зарядки пылевых частиц в плазме и образования плазменных кристаллов, где размеры частиц в эксперименте составляют $0,0001 \div 0,05 \frac{r_3}{\lambda_0}$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проанализируем результаты расчетов для случая отсутствия учета ионизации в объеме (радиальная теория). Для малого сферического зонда ($a \leq 0,01$) для величины безразмерной плотности ионного тока достаточно хорошо подходит аппроксимация:

$$j' = \frac{U}{a} \quad \text{или} \quad j_3 = \frac{e\varphi_3}{r_3} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 N_0}{M}}, \quad (13)$$

то есть ток на зонд пропорционален потенциалу зонда, корню из концентрации плазмы и радиусу зонда и не зависит от электронной температуры.

При $a \lesssim 10$ хорошо подходит аппроксимирующая формула

$$j' = \frac{4 + 0,6a}{1 + a} + \left(\frac{U}{a} \right)^{\frac{3+0,5a}{3+a}}. \quad (14)$$

Для цилиндра при $a \leq 0,01$ и $a \lesssim 10$ применимы выражения:

$$j' = \frac{0,23}{a} U^{2/3}; \quad j' = \frac{0,2 + 0,5a^{1/3}}{a} U^{2/3} + 0,6. \quad (15)$$

При $a > 0,1$ вычисления совпадают с результатами [8], [9], [13].

В случае учета объемной ионизации, как видно из рис. 2–6, с увеличением частоты ионизации A плотность ионного тока сначала несколько падает и, проходя через некоторый минимум, далее монотонно возрастает. В сферическом случае, например при любых значениях параметра a , зависимость плотности тока от частоты ионизации хорошо описывается следующим выражением:

$$\frac{j'}{j'_0} = 1 - 0,52A^{1/3} + \left(0,34 + \frac{a}{10 + 1,2a} \right) A^{2/3}. \quad (16)$$

Здесь j'_0 – плотность ионного тока при $A = 0$.

Дифференцирование (16) позволяет получить частоту ионизации A_{\min} , соответствующую минимуму плотности ионного тока. При $a \ll 0,1$ получаем $A_{\min} = 0,5$, что соответствует расчетным данным. Для цилиндрического зонда можно предложить аналитическую зависимость

$$\frac{j'}{j'_0} = 1 - 0,65A^{1/3} + \left(0,52 + \frac{a}{3 + 1,3a} \right) A^{2/3}.$$

Зависимость плотности ионного тока от частоты ионизации в объеме может быть качественно объяснена следующим образом. При малых размерах области возмущения r_0 (большая частота ионизации) рождаемые вследствие ионизации ионы находятся в сильном поле зонда и быстро уходят на него, создавая большой ионный ток. С увеличением области возмущения путь ионов увеличивается и ионный ток снижается. При больших размерах области возмущения ионный ток снова несколько увеличивается, так как снижается другой, тормозящий эффект ио-

низации – отставание дрейфовой скорости рожденных ионов от средней дрейфовой скорости потока ионов, уже ускоренных полем на больших расстояниях. При $A \rightarrow 0$ и, следовательно, $x_0 \rightarrow \infty$ результаты расчетов соответствуют результатам радиальной теории.

Наличие минимума ионного тока может объяснить образование плазменного кристалла. Так, в [3], [5], [6] обнаружены максимумы значений заряда и потенциала пылевой частицы в зависимости от межчастичного расстояния, соответствующие установившемуся межчастичному расстоянию. Это объясняется немонотонной зависимостью ионного тока из плазмы на пылевую частицу. С увеличением радиуса зонда "а" глубина минимума ионного тока уменьшается, как и A_{\min} . Это подтверждает нестабильность существования кристаллов с крупными пылевыми частицами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Типичное значение параметра "А" в разрядах низкого давления в трубках с радиусом r_{cm} – $A \sim \frac{\lambda_D}{r_{cm}} \ll 1$. Однако в пылевой плазме, где потери

заряженных частиц возрастают, этот параметр может существенно увеличиться. По результатам расчетов можно сделать следующие выводы.

- Уменьшение размера зонда ниже дебаевского электронного радиуса в обычной радиальной теории приводит к росту плотности тока на зонд обратно пропорционально радиусу зонда. При этом ток на зонд пропорционален потенциалу зонда в сферическом и потенциалу в степени $2/3$ в цилиндрическом случаях.

- Зависимость ионного тока на зонд от частоты ионизации при всех размерах зонда и любой геометрии немонотонная. С ростом объемной ионизации плотность тока на зонд сначала уменьшается, а затем растет. В пылевой плазме наличие минимума ионного тока на пылевую частицу может объяснять образование устойчивой пылевой структуры.

Работа была выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», контракт 16.740.11.0329.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зобнин А. В., Нефедов А. П., Синельщиков В. А., Фортон В. Е. О заряде пылевых частиц в газоразрядной плазме низкого давления // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 3. С. 554–560.
2. Методы исследования плазмы: Пер. с англ. / Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. М.: Мир, 1971. 551 с.
3. Сусун А. В., Шелестов А. С. Моделирование процессов зарядки наночастиц в плазме и установления межчастичного расстояния // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 8. С. 41–47.
4. Сусун В. И. Ионный ток на зонд при промежуточных давлениях и область возмущения плазмы зондом // Физика плазмы. 1978. Т. 4. № 4. С. 931–937.
5. Сусун В. И., Сусун А. В., Хахаев А. Д., Шелестов А. С. Зависимость потенциала и заряда пылевой частицы от межчастичного расстояния и его установление в плазме низкого давления // Физика плазмы. 2008. Т. 34. № 6. С. 548–556.
6. Сусун В. И., Хахаев А. Д., Олещук О. В., Шелестов А. С. Заряд и потенциал пылевой частицы в плазме низкого давления с учетом ионизации в области возмущения // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 9. С. 834–841.
7. Швейгерт В. А., Швейгерт И. В., Беданов В. М. и др. Структура кристалла микрочастиц в плазме высокочастотного разряда // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 3. С. 877–894.
8. Allen J. E., Boyd R. L. F., Reynolds P. The Collection of Positive Ions by a Probe Immersed in a Plasma // Proc. Phys. Soc. 1957. Vol. B70. № 3. P. 297–305.
9. Allen J. E., Turrin A. The collection of positive ions by a probe immersed in a plasma // Proc. Phys. Soc. 1964. Vol. 83. № 1. P. 177–179.
10. Auer R. L. The Role of Ion Currents in the Formation of Space Charge sheaths in a Low Pressure Arc. // Nuovo Cimento. 1961. Vol. 22. P. 548–564.
11. Bernstein I. B., Rabinowitz I. N. Theory of Electrostatic Probes in a Low-Density Plasma // Phys. Fluid. 1959. Vol. 2. № 2. P. 112–121.
12. Caruso A., Cavaliere A. The Structure of the Collisionless Plasma-sheath Transition // Nuovo Cimento. 1962. Vol. 26. P. 1389–1404.
13. Chen F. F. Numerical computations for ion probe characteristics in a collisionless plasma // J. Nucl. Energy. Part C. 1965. Vol. 7. № 1. P. 47–67.
14. Harrison E. R., Thomson W. B. The Low Pressure Plane Symmetric Discharge // Proc. Phys. Soc. 1959. Vol. 74. № 2. P. 145.
15. Kennedy R. V., Allen J. E. The floating potential of spherical probes and dust grains. I. Radial motion theory // J. Plasma Physics. Part 4. 2002. Vol. 67. P. 243–250.
16. Laframboise J. G. The theory of spherical and cylindrical probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest / Institute for aerospace studies, University of Toronto (UTIAS), Report 100. 1966.
17. Nairn C. M. C., Annaratone B. M., Allen J. E. On the theory of spherical probes and dust grains // Plasma Sources Sci. Technol. 1998. V. 7. № 4. P. 478–491.
18. Tonks L., Langmuir I. A General Theory of the Plasma of an Arc // Phys. Rev. 1929. Vol. 34. № 6. P. 876–922.