

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ БАБКИН

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики строительного факультета, Петрозаводский государственный университет  
babkin@karelia.ru

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ СТЕНОК

На базе модели пристеночной анизотропной турбулентности рассмотрена задача о теплообмене при напорном установившемся турбулентном течении несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями (плоский канал). Решение задачи о теплообмене при постоянной одинаковой температуре стенок найдено численно, методом Галёркина. Проведено сравнение решения с экспериментальными результатами.

Ключевые слова: пристеночная область, ядро течения, турбулентная вязкость, турбулентная теплопроводность

### ВВЕДЕНИЕ

Задача о теплообмене при турбулентном течении в плоском канале относится к числу классических задач гидродинамики. Ввиду отсутствия общепринятой теории турбулентности при аналитическом решении задачи прежде всего необходимо выбрать модели турбулентного течения и теплообмена. В данной работе используется модель пристеночной анизотропной турбулентности [1], [2]. В основу модели положены экспериментальные факты [13], [15], согласно которым в турбулентном потоке вблизи твердой стенки присутствуют когерентные вихревые структуры, существенным образом влияющие на характер течения. Вихревая структура образована плотной системой вихрей, вытянутых вдоль по потоку и наклоненных к нему. Их называют  $\Lambda$ -вихрями, или подковообразными вихрями. Каждый вихрь имеет две ветви – восходящую и нисходящую. При удалении от стенки углы наклона вихрей растут, достигая  $40\text{--}45^\circ$  в точке, в которой восходящая ветвь переходит в нисходящую. Система вихрей создает локальную анизотропию потока, характеризующую вектором, который называют директором. За пределами этого так называемого пристеночного слоя [1] вихревой характер течения сохраняется, но когерентность вихревой структуры отсутствует и поток является локально изотропным.

Принимая во внимание изложенные факты, при решении задачи плоский канал рассматривается как две бесконечные параллельные плоскости, область течения между которыми состоит из пристеночных слоев, прилегающих к плоскостям, и ядра течения. Для описания течения и теплопередачи в этих подобластях по необходимости используются разные модели.

### ПРОФИЛИ СКОРОСТЕЙ

Полагая, что характер течения жидкости не зависит от температуры, прежде всего найдем распределение скоростей в потоке. Поскольку © Бабкин В. А., 2011

подробное решение задачи о профиле скоростей в канале можно найти в [1], [2], здесь приведено его краткое изложение.

Пусть ширина канала с горизонтальными плоскими стенками равна  $2H$  (рис. 1). Возьмем декартову систему координат  $x, y, z$  с осью  $x$ , лежащей в срединной плоскости канала и направленной по потоку, с осью  $y$ , направленной перпендикулярно плоскостям стенок, и с осью  $z$ , образующей с осями  $x$  и  $y$  правую систему. Таким образом, уравнения стенок  $y = \pm H$ . В пристеночных слоях течение рассматривается в рамках модели анизотропной турбулентности [1], [2]. Описание движения среды и теплопередачи в ней производится только на уровне осредненных величин, поэтому здесь и далее для параметров модели используются обычные обозначения без знака осреднения. Для несжимаемой жидкости общие уравнения модели (уравнения неразрывности, количества движения, динамики директора и определяющие уравнения среды) в декартовых координатах  $x_1, x_2, x_3$  имеют вид:

$$\frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(a_{i\alpha} + \tau_{i\alpha})}{\partial x_\alpha} + f_i, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( I \frac{dn_i}{dt} \right) = \frac{\partial \beta_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + g_i + G_i, \quad (3)$$

$$a_{ij} = K \frac{\partial n_\alpha}{\partial x_i} \left( \frac{\partial n_j}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial n_\alpha}{\partial x_j} + n_j n_\beta \frac{\partial n_\alpha}{\partial x_\beta} \right), \quad (4)$$

$$\tau_{ij} = \mu_1 n_\alpha n_\beta e_{\alpha\beta} n_i n_j + \mu_0 e_{ij}, \quad (5)$$

$$\beta_{ij} = \kappa_j n_i + K \left( \frac{\partial n_i}{\partial x_j} - \frac{\partial n_j}{\partial x_i} - n_j n_\alpha \frac{\partial n_i}{\partial x_\alpha} \right), \quad (6)$$

$$g_i = \chi n_i - \frac{\partial(\kappa_\beta n_i)}{\partial x_\beta} + K n_\alpha \frac{\partial n_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial n_\beta}{\partial x_i}, \quad (7)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $u_i$  – локальная скорость,  $n_i$  – директор,  $p$  – давление,  $a_{ij}$  – напряжения, обусловленные наличием в среде вихревой структуры,  $\tau_{ij}$  – вязкие напряжения,  $\beta_{ij}$  – обобщенные напряжения,  $e_{ij}$  – скорости деформаций,  $f_i$ ,  $G_i$  – массовая и обобщенная массовая силы соответственно,  $g_i$  – обобщенная внутренняя массовая сила,  $I$ ,  $K$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  – определяющие коэффициенты модели,  $\kappa_i$ ,  $\chi$  – произвольные векторная и скалярная функции. Здесь и далее по одинаковым индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

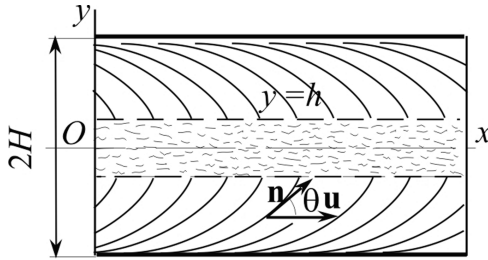


Рис. 1. Схема течения

Вернемся к рассматриваемому течению в канале в координатах  $x, y, z$ . Пусть вязкая несжимаемая жидкость в канале находится в режиме установившегося турбулентного течения. Длина канала бесконечная, стенки гладкие. Найдем вначале профили скоростей в пристеночных слоях. Воспользуемся уравнениями (1)–(7). Коэффициенты  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $I$ ,  $K$  приняты постоянными. Если пренебречь массовыми силами  $f_i$  и  $G_i$ , то течения в пристеночных слоях можно считать симметричными относительно срединной плоскости  $y = 0$ . Область течения  $|y| < H$  будем рассматривать как объединение трех подобластей: два пристеночных слоя  $h \leq |y| < H$  и ядро течения  $|y| \leq h$ , где  $h$  – полуширина ядра течения. Скорость  $u_i$ , директор  $n_i$  и давление  $p$  в пристеночных слоях отыскиваются в виде

$$\begin{aligned} u_x &= u(y), \quad u_y = u_z = 0, \quad n_x = \cos \theta(y), \\ n_y &= \sin \theta(y), \quad n_z = 0, \quad p = p_1(x) + p_2(y), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\theta$  – угол между директором  $n_i$  и осью  $x$ .

Подстановка выражений (8) в уравнения (1)–(7) после несложных преобразований приводит к уравнениям для  $u(y)$  и  $\theta(y)$ :

$$(\mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\mu_0}{2}) u' = -\tau_w \frac{y}{H}, \quad \tau_w = -\frac{\partial p}{\partial x} H, \quad (9)$$

$$\theta'' \sin \theta \cos \theta + \theta'^2 (1 - 3 \sin^2 \theta) = 0, \quad (10)$$

где  $(\partial p / \partial x)$  – постоянный вдоль потока градиент давления,  $\tau_w$  – модуль касательных напряжений на стенках канала, штрихами обозначены производные по  $y$ .

При условии, что стенки канала гладкие, граничные условия задаются равенствами [1], [2]:

$$\sin \theta(\pm H) = 0, \quad u(\pm H) = 0. \quad (11)$$

Интегрирование уравнений (9), (10) с граничными условиями (11) дает необходимые далее зависимости  $\theta(y)$ ,  $u(y)$  в виде [1], [2]

$$\cos \theta = [1 - 3bH(1 - |\xi|)]^{1/3}, \quad \xi = y/H, \quad (12)$$

$$u = Au_* [\Phi(\xi) - \Phi(1)], \quad \Phi(\xi) = F(t(\xi)),$$

$$t(\xi) = [1 - 3bH(1 - |\xi|)]^{1/3}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{3bH - 1}{2\gamma^2 - 1} \left( \sqrt{\gamma^2 - 1} \arctg \frac{t}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\gamma - t}{\gamma + t} \right) + \\ &+ \frac{1 + 2\varepsilon}{4(2\gamma^2 - 1)} \ln \frac{\gamma^2 - t^2}{t^2 + \gamma^2 - 1} + \frac{1}{4} \ln |t^4 - t^2 - \varepsilon| + \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

$$A = \frac{\rho u_*}{3\mu_1 b^2 R}, \quad \varepsilon = \frac{\mu_0}{2\mu_1}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad 2\gamma^2 = 1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon},$$

где  $b$  – постоянная интегрирования.

Профиль скоростей (13) справедлив только в прилегающих к твердой стенке пристеночных слоях. Толщину слоев можно найти на основе анализа опытных данных. По данным [13], [15], в развитом турбулентном течении при наибольшем удалении вихревых линий от стенки их угол наклона к направлению течения близок к  $45^\circ$ . Будем считать, что границы пристеночных слоев  $y = \pm h$  определяются условием того, что на границе слоя  $\theta = 45^\circ$ . Тогда из формулы (12) следует

$$1 - \frac{h}{H} = \frac{4 - \sqrt{2}}{12bH}. \quad (14)$$

Толщина пристеночного слоя  $\Delta = H - h$ , очевидно, определяет размер ядра течения. Если вершины пристеночных вихревых линий в среднем достигают срединной плоскости, то ядро течения исчезает, то есть  $h = 0$ . В этом случае полуширину канала назовем  $H_{max}$ . Из (14) следует

$$H_{max} = \frac{4 - \sqrt{2}}{12b}. \quad (15)$$

Таким образом, если полуширина канала  $H \leq H_{max}$ , то использование рассматриваемой модели справедливо по всему сечению канала. Например, при сопоставлении с опытными данными для течений воздуха найдено, что в трубах и каналах  $b \approx 4,83 \text{ м}^{-1}$  [3] и, следовательно, в них  $H_{max} \approx 45 \text{ мм}$ .

Если  $H > H_{max}$ , то в ядре течения для отыскания поля скоростей необходимо использовать другую модель. При выборе модели воспользуемся свойствами турбулентной вязкости. Анализ экспериментальных результатов показал, что в ядре течения турбулентная вязкость изменяется слабо и приближенно ее можно считать посто-

янной [6], [10], [11], [16]. Кроме того, согласно [14], [17], максимальное значение турбулентной вязкости достигается вблизи границы пристеночного слоя и ядра течения.

Как следует из формулы (9), здесь турбулентная вязкость задается формулой

$$\mu_T = (\mu_0/2) + \mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (16)$$

На границе пристеночного слоя и ядра течения ( $\theta = 45^\circ$ ) турбулентная вязкость (16), очевидно, принимает максимальное значение

$$\mu_{T0} = \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_0}{2}. \quad (17)$$

Из сравнения с опытными данными при течении воздуха в трубах и каналах при нормальных условиях (температура 20 °С, давление 760 мм рт. ст.) для модельных констант были получены равенства [3]:

$$b = 4,83 \text{ м}^{-1}, \quad \mu_0 = 1,85 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\mu_1 = 0,047 u_* \text{ Па} \cdot \text{с}. \quad (18)$$

Расчеты [4] показали, что при коэффициентах (18) вязкость  $\mu_{T0}$  имеет значения, весьма близкие к экспериментальным [14], [17], поэтому с учетом сказанного выше в ядре течения турбулентную вязкость примем постоянной и равной  $\mu_{T0}$ . Тогда уравнение (9) в ядре принимает вид

$$\mu_{T0} \frac{du}{d\xi} = -\tau_w \xi H, \quad \xi = \frac{y}{H}. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19) при условии непрерывности скорости на границе пристеночного слоя и ядра  $\xi = \xi_0$ , получим, что при  $|y| \leq h$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_0}{u_*} + \frac{\rho u_* H}{2\mu_{T0}} (\xi_0^2 - \xi^2), \quad |\xi_0| = \frac{h}{H}, \quad (20)$$

где расстояние  $\xi_0$  и скорость  $u_0$  – величины, вытекающие из формул (13) и (14):

$$|\xi_0| = 1 - \frac{4 - \sqrt{2}}{12bH}, \quad u_0 = Au_* [\Phi(\xi_0) - \Phi(1)]. \quad (21)$$

Таким образом, формулами (13) и (20) профиль скоростей определен во всей области течения. На рис. 2 для примера приведены расчетные профили скоростей (13), (20) при течении воздуха в канале шириной  $2H$  при числах Рейнольдса  $Re = 480\,000$  и  $920\,000$ . Числа Рейнольдса определены формулой

$$Re = \frac{4wH}{\nu}, \quad (22)$$

где  $w$  – средняя скорость потока,  $\nu$  – молекулярная кинематическая вязкость. Для сравнения точками представлены результаты экспериментов Конт-Белло [5] при этих же числах Рейнольдса. Расчетные профили скоростей (сплошные кривые) вычислены в условиях эксперимента и при значениях для  $b$ ,  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , заданных формулами (18). Согласие результатов достаточно удовлетворительное. Небольшое расхождение расчетных

и опытных данных у срединной плоскости потока вполне объяснимо приближенным характером предположения  $\mu_{T0} = \text{const}$  по всему ядру течения.

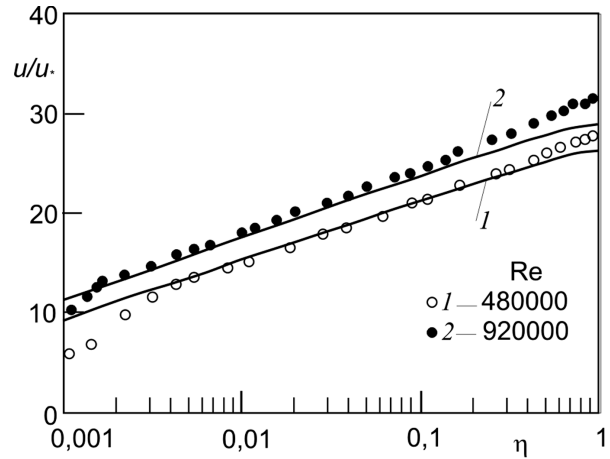


Рис. 2. Сравнение расчетных профилей с опытными данными: кривые – расчет по формулам (13), (20), точки – опытные данные [5]

## ТЕПЛООБМЕН

При решении задачи о теплообмене уравнения (1)–(3) необходимо дополнить уравнением притока тепла, которое в декартовых координатах  $x_i$  имеет вид [1], [4]

$$\rho \frac{dU}{dt} = (-p\delta_{ij} + a_{ij} + \tau_{ij})e_{ij} + \beta_{ij}N_{ij} - g_i N_i + Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (23)$$

где  $U$  – внутренняя энергия единицы массы,  $Q$  – интенсивность источника тепла,  $q_i$  – поток тепла,  $a_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  – напряжения,  $g_i$  – обобщенная сила, соответственно определенные формулами (4)–(7). Кинематические параметры  $N_i$ ,  $N_{ij}$  определяются формулами

$$N_i = \dot{n}_i - \omega_{ia} n_a, \quad N_{ij} = \frac{\partial \dot{n}_i}{\partial x_j} - \omega_{ia} \frac{\partial n_a}{\partial x_j}, \quad (24)$$

$$\dot{n}_i = \frac{dn_i}{dt}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Конкретно задача о теплообмене в плоском канале формулируется следующим образом. Пусть в плоском канале, ограниченном гладкими параллельными стенками, в режиме установившегося турбулентного течения движется несжимаемая жидкость. Система координат и схема течения даны на рис. 1. Пусть во входном сечении  $x = 0$  температура  $T_0$  постоянна. Найдём распределение температуры  $T$  в полубесконечной по оси  $x$  области  $x \geq 0$  при условии, что температура  $T_w$  на стенках одинаковая и постоянная. Как и при определении профиля скоростей, задача о распределении температуры в пристеночном слое и ядре течения рассматривается отдельно.

С учетом симметрии явления в принятой выше системе координат  $x, y, z$  температуру  $T$  будем отыскивать в виде  $T = T(x, y)$ . Вследствие известной глубокой связи между процессами переноса импульса и тепла при турбулентном течении теплопроводность турбулентной жидкости в пристеночном слое, как и выше турбулентную вязкость, будем считать зависящей от локальной анизотропии потока, то есть от директора  $n_i$  ( $i = x, y, z$ ). Поскольку  $T = T(x, y)$ , закон Фурье принимает вид [1], [4]

$$\begin{aligned} q_x &= -(\lambda_0 + \lambda_1 n_x^2) \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_1 n_x n_y \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_y &= -\lambda_1 n_x n_y \frac{\partial T}{\partial x} - (\lambda_0 + \lambda_1 n_y^2) \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  – определяющие коэффициенты модели, характеризующие турбулентную теплопроводность среды.

Как видно из (25), если пренебречь теплопроводностью в направлении течения, то коэффициент турбулентной теплопроводности  $\lambda_T$  в пристеночном слое определяется формулой

$$\lambda_T = \lambda_0 + \lambda_1 n_y^2 = \lambda_0 + \lambda_1 \sin^2 \theta. \quad (26)$$

Уравнение распространения тепла в потоке, необходимое для решения поставленной задачи теплообмена, следует из уравнения притока тепла (23) после некоторых преобразований. Подставим в уравнение (23) равенства (24), (25), заменяя попутно координаты скорости  $u_i$  и директора  $n_i$  их выражениями (8); выразим внутреннюю энергию  $U$  через энтальпию  $i = c_p T$  и проведем обычно принятую в подобных задачах оценку вклада различных членов уравнения в перенос тепла [9], [10]. Тогда, считая используемые коэффициенты  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  постоянными и пренебрегая производством тепла ( $Q = 0$ ), получим искомое уравнение распространения тепла в пристеночном слое в виде

$$(\lambda_0 + \lambda_1 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_1 \theta' \sin 2\theta \frac{\partial T}{\partial y} = \rho c_p u(y) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (27)$$

где  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $u(y)$  – профиль скоростей (13), штрихом обозначена производная по  $y$ .

В ядре течения коэффициент турбулентной теплопроводности  $\lambda_{T0}$ , как и турбулентную вязкость, будем считать постоянным и равным турбулентной теплопроводности  $\lambda_T$  на границе областей  $|y| = h$ :

$$2\lambda_{T0} = 2\lambda_0 + \lambda_1. \quad (28)$$

Тогда уравнение распространения тепла в ядре течения имеет вид

$$\lambda_{T0} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c_p u(y) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (29)$$

где  $u(y)$  – профиль скоростей (20).

При решении задачи удобно перейти к безразмерным величинам

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad \xi = \frac{y}{H}. \quad (30)$$

Уравнения (27) и (29) можно рассматривать как одно уравнение во всей области течения, которое после подстановки в него соответственно профилей скоростей (13) и (20) в безразмерных переменных (30) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \Psi_1(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} &= \Psi_2(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \\ \Psi_1(\xi) &= \begin{cases} 0, & 0 < |\xi| < |\xi_0|, \\ -\frac{2\lambda_1 b H}{t(\xi)[\lambda_0 + \lambda_1(1 - t^2(\xi))]}, & |\xi_0| < |\xi| < 1, \end{cases} \\ \Psi_2(\xi) &= \begin{cases} \frac{\rho c_p u(\xi) H}{\lambda_{T0}}, & 0 < |\xi| < |\xi_0|, \\ \frac{\rho c_p u_* A H (\Phi(\xi) - \Phi(1))}{\lambda_0 + \lambda_1(1 - t^2(\xi))}, & |\xi_0| < |\xi| < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнение (31) должно удовлетворять граничным условиям

$$\Theta(\xi, 0) = 1, \quad \Theta(\pm 1, X) = 0, \quad \frac{\partial \Theta(0, X)}{\partial \xi} = 0 \quad (32)$$

и условиям срачивания решений на границе областей  $\xi = \xi_0$

$$\Theta(\xi_0 \mp 0, X) = \Theta(\xi_0 \pm 0, X), \quad (33)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi_0 \mp 0, X)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Theta(\xi_0 \pm 0, X)}{\partial \xi}.$$

Функции  $t(\xi)$ ,  $\Phi(\xi)$  и величины  $u_*$ ,  $A$  в уравнении (31) определены формулами (13).

Принимая во внимание симметрию процесса теплообмена относительно срединной плоскости  $\xi = 0$ , ограничимся решением в области  $0 \leq \xi \leq 1$ . Поскольку точное аналитическое решение найти не удастся, будем отыскивать его приближенно методом Галёркина в виде

$$\Theta(X, \xi) = \sum_{k=1}^n g_k(X) \varphi_k(\xi). \quad (34)$$

Базисные функции  $\varphi_k(\xi)$ , удовлетворяющие в области  $0 \leq \xi \leq 1$  второму и третьему граничным условиям (32) и первому условию непрерывности (33), определим формулами

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi) &= \Phi_0(\xi) \cos(k-1)\pi\xi, \\ \Phi_0(\xi) &= \begin{cases} F_0(t(\xi)) - F_0(1), & \xi_0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{\Phi_0(\xi_0)}{u(\xi_0)} \left[ u(\xi_0) + \frac{\rho u_*^2 H}{2\mu_{T0}} (\xi_0^2 - \xi^2) \right], & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

$$F_0(t) = 2(3bH - 1) \ln \frac{\gamma - t}{\gamma + t} \ln \frac{\gamma^2 - t^2}{t^2 + \gamma^2 - 1} + \ln |t^4 - t^2 - \epsilon| + 2t^2,$$

где  $u(\xi_0)$  – скорость на границе пристеночного слоя и ядра течения.

Функции  $g_k(X)$  определяются стандартной процедурой метода Галёркина [7] с учетом первого граничного условия (32).

При известных функциях  $g_k(X)$  формула (34) дает приближенное решение задачи. Местное число Нуссельта  $Nu = 4\alpha H/\lambda$  на одной стенке канала можно вычислить затем по формулам [9]

$$Nu(X) = -\frac{4\lambda_0}{\lambda\Theta} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}, \quad (36)$$

$$\bar{\Theta}(X) = \frac{1}{w} \int_0^1 \Theta(\xi, X) u(\xi) d\xi,$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$  – коэффициент молекулярной теплопроводности жидкости,  $\bar{\Theta}$  – средняя массовая температура по сечению,  $w$  – средняя скорость в канале

$$w = \int_0^1 u(\xi) d\xi.$$

Для сравнения с опытными данными решение (34) было реализовано при следующих конкретных условиях. Жидкость – воздух при нормальных условиях:  $\rho = 1,205 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\lambda = 2,57 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ,  $c_p = 1002 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , число Прандтля  $Pr = 0,705$ . Коэффициенты  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  и константа  $b$  заданы формулами (18). Коэффициенты  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , входящие в формулу (26) для турбулентной теплопроводности, определены формулами

$$\lambda_0 = 0,28 u_* H, \quad \lambda_1 = 46,5 u_*. \quad (37)$$

В результате расчета получены значения предельного числа Нуссельта  $Re = 5 \cdot 10^5$  при течениях с числами Рейнольдса вплоть до  $Re = 5 \cdot 10^5$  в каналах шириной  $2H = 100; 200; 300 \text{ мм}$  (точки на рис. 3). Для сравнения на рис. 3 приведены также графики известных эмпирических формул.

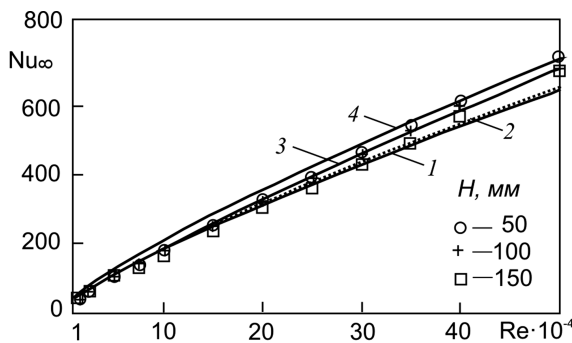


Рис. 3. Зависимость предельного числа Нуссельта  $Nu_{\infty}$  от числа Рейнольдса  $Re$  для каналов ширины  $2H$ .

Точки – результат расчета, кривые – графики эмпирических формул: 1 – [9], 2 – [8], 3 – [10], 4 – [12]

Кривая 1 [9]:

$$Nu_{\infty} = \frac{f Re Pr / 8}{1 + \frac{900}{Re} + 12,7 \sqrt{\frac{f}{8}} (Pr^{2/3} - 1)}; \quad (38)$$

кривая 2 [8]:

$$Nu_{\infty} = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,43}; \quad (39)$$

кривая 3 [10]:

$$Nu_{\infty} = 7,6 - \frac{3,6}{\lg Re} + 0,0096 Re^{0,87} Pr^{0,605}; \quad (40)$$

кривая 4 [12]:

$$Nu_{\infty} = \frac{Re Pr \sqrt{f/2}}{4,24 \ln(Re \sqrt{f/16}) + 25,0 Pr^{2/3} + 4,24 \ln Pr - 20,2}, \quad (41)$$

где  $Pr$  – число Прандтля,  $Re$  – число Рейнольдса,  $f$  – коэффициент сопротивления, определяемые формулами

$$Pr = \frac{\rho \nu c_p}{\lambda}, \quad Re = \frac{4wH}{\nu}, \quad f = \frac{1}{(1,82 \lg Re - 1,64)^2}.$$

Как видим, рис. 3 демонстрирует достаточно удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных результатов вплоть до  $Re = 500\,000$ . Некоторое расхождение результатов вполне объяснимо хотя бы тем, что сами эмпирические формулы не совпадают между собой.

Представляет интерес сравнение процесса теплообмена в плоской трубе с теплообменом в круглой трубе [1], [4]. Обычно эти процессы рассматриваются как аналогичные [9]. Проявлением аналогии является прежде всего общий вид формул (38)–(41) для обоих процессов теплообмена при соответствующем выборе параметров, через которые определяются безразмерные величины  $f$ ,  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Nu$ . Если сравнить решения задач о теплообмене здесь и в [1], [4], то нетрудно убедиться, что аналогия проявляется на каждом шаге. В частности, в обоих случаях величины  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  и  $b$  одинаково определены формулами (18), а уравнениям (37) при течении в канале соответствуют аналогичные уравнения

$$\lambda_0 = 0,28 u_* R, \quad \lambda_1 = 46,5 u_*$$

при течении в трубе, где  $R$  – радиус трубы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из основных трудностей при аналитическом или численном решении задачи, связанной с турбулентным течением жидкости, состоит в том, что в настоящее время неизвестна универсальная модель турбулентности. В связи с этим в последние десятилетия потребности практики стимулировали разработку довольно значительного числа моделей разной степени общности. В их число входит и использованная выше феноменологическая модель анизотропной пристеночной турбулентности. Она относится только к течениям, имеющим границы твердую стенку. Рассмотренная задача еще раз показала, что, как и при решении ряда задач ранее [1], [2], [3], [4], эта модель достаточно адекватно описывает класс пристеночных течений, позволяя аналитически определять как сопротивление, так и параметры теплопередачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсеньев С. А., Бабкин В. А., Губарь А. Ю., Николаевский В. Н. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 308 с.
2. Бабкин В. А. Турбулентный поток в пристеночной области как течение анизотропной жидкости // Инженерно-физический журнал. 2002. Т. 75. № 5. С. 69–73.
3. Бабкин В. А. Теплообмен в круглой трубе при моделировании турбулентного течения воздуха течением ориентируемой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 1. С. 155–161.
4. Бабкин В. А. Профили скоростей и теплообмен при турбулентном течении несжимаемой жидкости в гладкой круглой трубе немалого диаметра // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2009. № 5. С. 91–97.
5. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение с параллельными стенками: Пер. с франц. М.: Мир, 1968. 176 с.
6. Лапин Ю. В., Нехамкина О. А., Стрелец М. Х. Полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений. Установившееся течение в круглой трубе с гладкими стенками // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 31–36.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
8. Михеев М. А. Средняя теплоотдача при движении жидкости в трубах // Теплопередача и тепловое моделирование. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 122–137.
9. Петухов Б. С., Поляков А. Ф. Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986. 192 с.
10. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.
11. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
12. Kader B. A., Yaglom A. M. Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. № 12. P. 2329–2351.
13. Labraga L., Lagraa B., Mazouz A., Keirsbulck L. Propagation of shear-layer structures in near-wall region of a turbulent boundary layer // Experiments in Fluids. 2002. Vol. 33. № 5. P. 670–676.
14. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow NACA. 1954. Rep. № 1174.
15. Perry A. E., Chong M. S. On the mechanism of wall turbulence // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 119. P. 173–217.
16. Poje A. C., Lumley J. L. A model for large-scale structures in turbulent shear flows // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 285. P. 349–369.
17. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen // Z. Angew. Math. Mech. 1951. Bd. 31. S. 208–219.