

ВАДИМ ВАЛЬТЕРОВИЧ ПОЙКОЛАЙНЕН
аспирант кафедры информатики и математического обеспечения математического факультета, Петрозаводский государственный университет
poikolainen@cs.karelia.ru

ГЕННАДИЙ СЕРГЕЕВИЧ СИГОВЦЕВ
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и математического обеспечения математического факультета, Петрозаводский государственный университет
sigovtsev@cs.karelia.ru

ДЕТАЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Предложены детализированная возрастная модель и строящаяся на ее основе стадийная модель популяции, а также численный алгоритм анализа их устойчивости. Показано их применение для задачи оборота стада сельскохозяйственных животных.

Ключевые слова: матричная модель структурированной популяции, проекционная матрица, задача оборота стада

ВВЕДЕНИЕ

В агропромышленном секторе экономики одной из важных задач является планирование оборота стада сельскохозяйственных животных [10], [11]. Оборотом стада называется происходящая во времени совокупность процессов, включающая переход животных из одной стадии (категории) в другую, удаление животных разных стадий из стада и появление потомства.

В качестве основы для построения модели стада может быть использовано понятие структурированной популяции. В математической биологии под этим понимают множество проживающих в одной локации организмов одного вида, дискретно разбитых на некоторые классы по какому-либо признаку. Группы могут определяться полом, начальным и конечным возрастом и другими существенными для целей моделирования признаками. Поэтому в описании структурированных популяций используют понятие последовательных стадий жизни организма.

Состояние популяции, разделенной на некоторое число стадий, рассматривается в равноотстоящие дискретные моменты времени и описывается вектором-столбцом $X(t) = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,n})^T$, где $x_{t,i}$ – численность организмов, отнесенных к стадий i , n – количество стадий. Динамика популяции задается соотношением

$$X(t+1) = L_t \cdot X(t), t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

определяющим состояние популяции в момент $t + 1$ по состоянию в момент t посредством матрицы L_t , которую называют проекционной. В общем случае элементы проекционной матрицы могут зависеть от времени.

РАЗВИТИЕ МОДЕЛЕЙ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

Простейшим вариантом модели (1) является модель Лесли [8], в которой стадиями являются

возрастные группы, а проекционная матрица имеет вид:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$0 \leq b_i$ – коэффициент рождаемости для стадии i , $0 < s_i \leq 1$ – коэффициент дожития (перехода из стадии i в стадию $i + 1$).

Если для квадратной матрицы A порядка n и ориентированного графа G с n вершинами, пронумерованными числами от 1 до n , существует взаимно однозначное соответствие между ненулевыми элементами $a_{i,j}$ и дугами (i, j) , то такой граф называется ассоциированным с матрицей и обозначается $G(A)$. Граф, ассоциированный с проекционной матрицей структурированной популяции, называют графом жизненного цикла (ГЖЦ) организмов данной популяции.

Для модели Лесли ГЖЦ изображен на рис. 1.

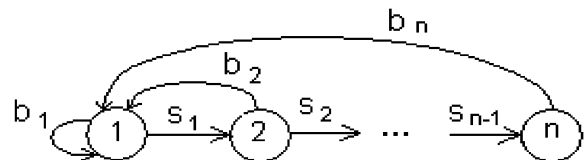


Рис. 1. ГЖЦ модели Лесли

В модели Лесли на каждом шаге происходит полное обновление состава каждой возрастной группы, что является достаточно жестким ограничением для практического использования этой модели. Более общей является модель Лефковича [8], в которой часть особей каждой стадии остается в той же стадии при переходе

к следующему моменту времени. Проекционная матрица модели Лефковича имеет вид:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 + r_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & r_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где r_i – коэффициент задержки, $0 < s_i + r_i \leq 1$.

ГЖЦ для модели Лефковича изображен на рис. 2.

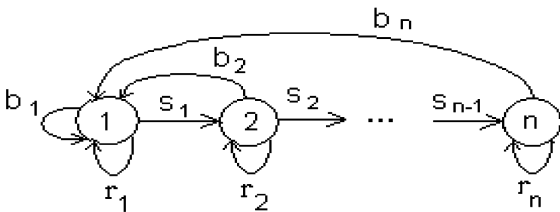


Рис. 2. ГЖЦ модели Лефковича

ГЖЦ на рис. 1 и 2 показаны для случая, когда все параметры проекционных матриц $b_i, r_i > 0$. Если какой-то из этих параметров равен нулю, то соответствующая дуга ГЖЦ отсутствует.

С математической точки зрения модели Лесли и Лефковича достаточно хорошо изучены [6], [8]. Основные их свойства связаны с теоремой Перрона – Фробениуса для матриц с неотрицательными элементами [2; 130]. В соответствии с этой теоремой спектральный радиус неотрицательной неразложимой матрицы равен максимальному положительному собственному числу. Это число имеет кратность 1, ему соответствует положительный собственный вектор, и оно возрастает при увеличении любого элемента матрицы.

Неразложимость матрицы эквивалентна тому, что ассоциированный с ней орграф сильно связан (для любой пары вершин существует ориентированный путь из одной вершины в другую). В частности, проекционные матрицы моделей Лесли и Лефковича неразложимы, если $b_n > 0$ (последняя стадия популяции является репродуктивной).

Таким образом, спектральный радиус проекционной матрицы $\rho(L) = \lambda_{\max}$ – положительное собственное число матрицы L кратности 1.

Асимптотика вектора $X(t)$, определяемого соотношением (1), при $t \rightarrow \infty$ зависит от величины спектрального радиуса $\rho(L)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(L) > 1 \quad x_{i,t} &\rightarrow \infty, \\ \rho(L) < 1 \quad x_{i,t} &\rightarrow 0, \\ \rho(L) = 1 \quad x_{i,t} &\rightarrow x_i^*, \end{aligned} \quad (4)$$

для каждой стадии $i = 1, \dots, n$.

Последний случай означает устойчивость популяции: ее численность в каждой стадии стре-

мится к конечному пределу, не зависящему от начальной численности популяции. При этом из уравнений (1) для матрицы L вида (3) следует, что предельные численности стадий в модели Лефковича связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= \frac{s_i}{1-r_{i+1}} \cdot x_i^*, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ x_1^* &= \frac{1}{1-b_1-r} \cdot \sum_{i=2}^n b_i x_i^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Следствием соотношений (5) является условие:

$$b_1 + r_1 + \sum_{i=2}^n b_i \cdot q_i = 1, \quad \text{где } q_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{s_j}{1-r_{j+1}}. \quad (6)$$

Так как вектор предельных численностей X^* является собственным вектором проекционной матрицы, соответствующим собственному числу $\lambda_{\max} = 1$, то условие (6) – это условие стабильности популяции. Условие (6) соответствует приведенному в [3] результату об индикаторе потенциального роста популяции в модели Лефковича.

Собственный вектор X^* при условии, что $\sum_{i=1}^n x_i^* = 1$, называется относительной стадийной структурой популяции [6].

Из соотношений (5) следует, что вектор относительной структуры популяции в модели Лефковича имеет вид:

$$\left(\frac{1}{1 + \sum_{i=2}^n q_i}, \frac{q_2}{1 + \sum_{i=2}^n q_i}, \dots, \frac{q_n}{1 + \sum_{i=2}^n q_i} \right)^T.$$

Условие $b_n > 0$ не является принципиальным ограничением для применения описанных выше моделей [8; 58]. Наличие в модели популяции пострепродуктивных стадий не влияет на динамику стадий популяции с номерами от 1 до n (последняя репродуктивная стадия), которая по-прежнему определяется матрицей (3). Численность пострепродуктивных стадий определяется соотношением:

$$x_{n+i,t+1} = s_{n+i-1} \cdot x_{n+i-1,t} + r_{n+i} \cdot x_{n+i,t}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

где m – количество таких стадий.

ГЖЦ модели с пострепродуктивными стадиями показано на рис. 3.

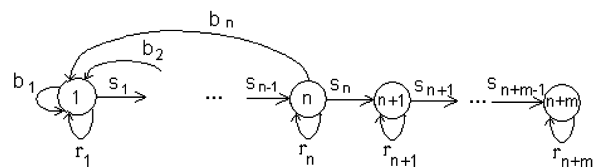


Рис. 3. ГЖЦ модели с пострепродуктивными стадиями

Данный граф не является сильно связным (отсутствуют пути из вершин $n + 1, \dots, n + m$ в вершины $1, \dots, n$); соответственно, проекционная матрица \bar{L} такой модели разложима. Она имеет вид:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ S & M \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где L – матрица (3), M – $m \times n$ – матрица переходов для пострепродуктивных стадий

$$M = \begin{bmatrix} r_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{n+1} & r_{n+2} & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & s_{n+m-1} & r_{n+m} \end{bmatrix}, \quad S - m \times n -$$

матрица с единственным ненулевым элементом s_n в правом верхнем углу, связывающим стадии n и $n + 1$.

Вектор состояния популяции $X(t) = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,n})^T$ может быть разбит на два вектора $X^I(t) = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,n})^T$ и $X^{II}(t) = (x_{t,n+1}, x_{t,n+2}, \dots, x_{t,n+m})^T$. Изменение численности популяции описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} X^I(t+1) = L \cdot X^I(t) \\ X^{II}(t+1) = S \cdot X^I(t) + M \cdot X^{II}(t) \end{cases} \quad (9)$$

Асимптотика вектора $X^I(t)$, определяемого соотношением (9), при $t \rightarrow \infty$ по-прежнему зависит от величины спектрального радиуса $\rho(L)$ так, как это указано в (4).

Характер асимптотики вектора $X^{II}(t)$ однозначно определяется поведением вектора $X^I(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{t,i} = x_i^*, i = 1, \dots, n$, то по индукции доказывается, что существуют пределы $x_{t,n+i}$ для $i = 1, \dots, m$ при $t \rightarrow \infty$.

Из (7) также следует, что если $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{t,i} = \infty, i = 1, \dots, n$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{t,n+i} = \infty$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Вектор относительной структуры популяции имеет такой же вид, как и выше (с распространением суммирования по i от 2 до $n + m$).

В работах Д. О. Логофета и других [5], [6], [7] рассмотрены некоторые обобщения моделей Лесли и Лефковича, связанные с необходимостью в некоторых случаях классифицировать особей популяции по нескольким признакам. Например, в [14] модель популяции северных оленей учитывает их возраст и статус («сильный», «средний», «слабый»).

Такого типа модель может быть записана в форме матричного уравнения (1), если матрицу двойной структуры популяции (строкам матрицы соответствует возраст, а столбцам – статус особи) представить в виде вектора, образованного конкатенацией строк [5]. Проекционная матрица такой модели, называемая обобщенной матрицей Лефковича или матрицей Логофета [4], в общем случае имеет вид:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 + r_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_{21} & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn-1} & r_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

при условии, что $0 < r_j + \sum_{i=j+1}^n s_{ij} \leq 1$ для всех $j = 1, \dots, n - 1$.

Для матрицы (10) также существует выражаемый через элементы матрицы индикатор потенциального роста [6], обобщающий условие существования стабильной популяции (6).

В ряде работ указывается, что матричные модели не всегда удается должным образом применить для решения некоторых практических задач ввиду недостаточно явно представленной динамики популяции [3]. Например, в работах [13], [15] предлагается детализировать матричный подход к расчету динамики структурированной популяции, разложив его на «скрытые» субпроцессы. Из состояния популяции X_t в момент t рассчитывается численность выживших за шаг времени $X_S(t)$, затем взросление $X_A(t)$ и получение потомства $X_B(t)$, таким образом получается численность популяции в момент $t + 1$: $X(t) \rightarrow X_S(t) \rightarrow X_A(t) \rightarrow X_B(t) \equiv X(t + 1)$. Такая детализация динамики в некоторой степени упрощает определение модельных параметров.

Дискретные модели широко применяются для описания эксплуатируемых популяций, когда производится регулируемое изъятие некоторой части особей, принадлежащих определенным стадиям, а также для постановки и решения оптимизационных задач [9], [11].

ДЕТАЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Популяции типа стада сельскохозяйственных животных относят к эксплуатируемым популяциям, хотя для них характерны не только процессы изъятия части особей, но и добавление извне новых особей, а также другие целенаправленные воздействия управляющего субъекта, влияющие на состав и численность популяции. В этом случае более адекватным будет термин «управляемая популяция».

Использование дискретной модели динамики управляемой популяции для задачи планирования оборота стада сельскохозяйственных животных и рассмотрения на этой основе оптимизационных задач планирования работы агрохозяйственного предприятия требует более детального анализа динамики численности. В задачах планирования, как правило, расчеты производятся на определенный временной промежуток, разделяемый на несколько равных периодов длиной T .

Особи стада могут находиться в одной из n стадий, принадлежность к которым определяется возрастом особи τ_k , измеряемым в некоторых единицах дискретного модельного времени $t = 0, 1 \dots, m$. Каждой стадии i соответствует свой возрастной промежуток $[\tau_{i-1}, \tau_{i-2}]$; промежутки разных стадий не пересекаются. Задан предельный возраст $\tau_m = m$, при достижении которого все особи из популяции изымаются.

Будем считать величину периода T равной некоторому количеству единиц модельного времени. Обозначим через $T_i = \tau_{i-2} - \tau_{i-1}$ продолжительность стадии i . В задачах планирования оборота стада обычно $T > \min T_i$ [10], [11], поэтому за один период особь может пройти несколько стадий. Такая же возможность существует и для особи, родившейся в течение этого периода.

Основа детализации модели – в рассмотрении изменений численности различных стадий популяции за единицу модельного времени за счет изменения возраста особей с учетом изъятия части особей и появления особей-потомков.

Пусть заданы функция $h(\tau, t)$ – доля изымаемых в момент времени t особей возраста τ в общей численности особей этого возраста, и функция $g(\tau, t)$ – коэффициент репродуктивности особей возраста τ на момент времени t . Если обозначить $Y(t) = (y_{t,1}, y_{t,2}, \dots, y_{t,m})^T$ вектор, компонентами которого являются численности особей каждого возраста в момент времени t , то для него будет справедливо соотношение вида (1) $Y(t+1) = \Lambda_t \cdot Y(t)$, где Λ_t имеет вид матрицы Лесли:

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \beta_q^t & \dots & \beta_m^t \\ \sigma_1^t & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{m-1}^t & 0 \end{bmatrix},$$

$\beta_k^t = g(\tau_k, t)$, $\sigma_k^t = 1 - h(\tau_k, t)$, q – номер начального возраста первой репродуктивной популяции.

Для вектора $X(t) = (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,n})^T$ численностей стадий популяции соотношение (1) будет иметь место с проекционной матрицей L_t , имеющей вид матрицы Лефковича

$$L_t = \begin{bmatrix} r_1^t & \dots & b_p^t & \dots & b_n^t \\ s_1^t & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & r_p^t & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1}^t & r_n^t \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы L_t определяются через элементы матрицы Λ_t , p – номер первой репродуктивной популяции.

Обозначим через $f_k^t = \frac{y_{t,k}}{\sum_{j=1}^m y_{t,j}}$ долю особей популяции

возраста τ_k во всей численности популяции,

$\hat{f}_k^t = \frac{f_k^t}{\sum_{j \in K_i} f_j^t}$ – долю особей популяции

возраста τ_k , принадлежащего i -й стадии в численности этой стадии популяции (K_i – множество индексов, принадлежащих диапазону возрастов особей стадии i). Тогда для элементов матрицы L_t получаем:

$$s_i^t = \sigma_{i-2}^t \cdot \hat{f}_{i-2}^t, \quad b_i^t = \sum_{j \in K_i} \beta_j^t \cdot \hat{f}_j^t, \quad r_i^t = \sum_{j \in K_i \setminus \{i-2\}} \sigma_j^t \cdot \hat{f}_j^t.$$

Структурированная численность популяции через плановый период времени T будет определяться для возрастной модели соотношением:

$$Y(T) = \Lambda^{(T)} \cdot Y(0), \tag{11}$$

$\Lambda^{(T)} = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \dots \cdot \Lambda_l$, где l – количество единиц модельного времени в периоде.

В том частном случае, когда проекционные матрицы детализированной модели не зависят от времени ($\Lambda_t = \Lambda$), имеем $\Lambda^{(l)} = \Lambda^l$ и для спектрального радиуса $\rho(\Lambda^{(l)}) = [\rho(\Lambda)]^l$. В этом случае каждый из вариантов условий (4) для матриц детализированной и недетализированной моделей выполняется одновременно, и для выяснения устойчивости популяции достаточно проверки условия (6), которое для матрицы Λ имеет вид:

$$\sum_{i=q}^m \beta_i \cdot \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j \right) = 1.$$

При моделировании популяции типа стада крупного рогатого скота более реалистичны нестационарные модели, когда зависимость параметров детализированной возрастной (а следовательно, и стадийной) модели от времени носит сезонно-циклический характер. Но если l кратно длине цикла изменения параметров, то матрица $\Lambda^{(l)}$ от времени не зависит. При этом возможно выполнение условия устойчивости популяции $\rho(\Lambda^{(l)}) = 1$ в ситуации, когда спектральные радиусы Λ_t в разные моменты модельного времени принимают значения как больше, так и меньше единицы.

Структура проекционной матрицы планового периода T $\Lambda^{(T)}$ при $T < q$ показана на рис. 4.

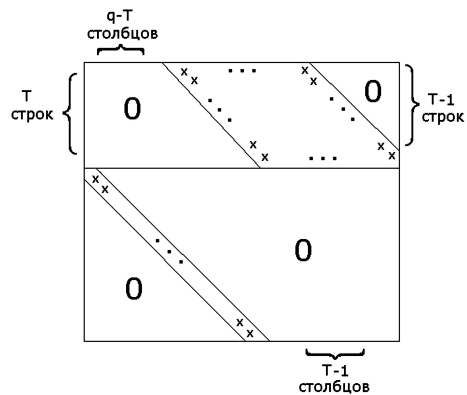


Рис. 4. Структура матрицы $\Lambda^{(T)}$

Элементы, отмеченные значком x , выражаются через значения величин β, σ матриц-сомножителей; остальные элементы равны нулю.

Элементы поддиагонали с номером T имеют вид:

$$a_{i,j} = \prod_{r=j}^{j+T-1} \sigma_k^{k-j+1}, j=1, \dots, m-T, i=T+j, \quad (12)$$

а элементы параллелограмма в верхней части матрицы имеют вид:

$$a_{i,j} = \beta^{T-i+1} \left(\prod_{k=1}^{T-i} \sigma_k^{k+j-1} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \sigma_k^{k-i+T+1} \right),$$

$$i=1, \dots, T, j=q-T+i, \dots, m-T+i. \quad (13)$$

Если в (13) в одном из произведений верхняя граница индекса равна нулю, то произведение считается равным единице.

Для стадийной модели проекционная матрица планового периода $L^{(T)}$ может быть получена путем агрегации элементов матрицы $\Lambda^{(T)}$, относящихся к одной стадии. Для этого на матрицу $\Lambda^{(T)}$ накладывается прямоугольная сетка с ячейками $K_{i,j}, i, j=1, \dots, n. K_{i,j}$ принадлежат элементы матрицы $\Lambda^{(T)}$ $a_{u,v}$, где $u \in K_i$. Ячейке $K_{i,j}$ соответствует элемент $d_{i,j}$ матрицы $L^{(T)}$.

Так как $x_{T,i} = \sum_{l \in K_i} y_{T,l}$, из (11) получаем:

$$x_{T,i} = \sum_{l \in K_i} \left(\sum_{u=1}^m a_{l,u} y_{0,u} \right) = \sum_{u=1}^m \left(\sum_{l \in K_i} a_{l,u} \right) y_{0,u} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{u \in K_j} \left(\sum_{l \in K_i} a_{l,u} \right) y_{0,u} \right).$$

Соотношение $X(T) = L^{(T)}$ выполняется, если

$$\sum_{j=1}^n d_{i,j} x_{0,j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{u \in K_j} \alpha_{i,u} y_{0,u} \right), \text{ где } \alpha_{i,u} = \sum_{l \in K_i} a_{l,u}.$$

Отсюда получаем:
$$d_{i,j} = \frac{\sum_{u \in K_j} \alpha_{i,u} y_{0,u}}{\sum_{u \in K_j} y_{0,u}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на начальную численность популяции, получаем формулу для вычисления элементов матрицы $L^{(T)}$:

$$d_{i,j} = \sum_{u \in K_j} \alpha_{i,u} \hat{f}_u. \quad (14)$$

В общем случае получение явных выражений для элементов матриц $\Lambda^{(T)}$ и $L^{(T)}$, необходимых для проверки условий типа (6) или вычисления индикатора потенциального роста [6], весьма трудоемко. Эти проверки можно заменить вычислительной процедурой, результаты которой могут быть использованы как «эмпирический» индикатор потенциального роста. Процедура

основана на идее степенного метода нахождения наибольшего по модулю собственного числа матрицы [12].

Если квадратная матрица A порядка n – матрица простой структуры (то есть имеет n линейно независимых собственных векторов) и $z_k = A^k \cdot z_0, k=1, 2, \dots$, то для всех значений индекса $i=1, \dots, n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_{k+1})_i}{(z_k)_i} = \lambda, \quad (15)$$

где λ – наибольшее по модулю простое собственное число матрицы A . (15) имеет место для произвольного вектора z_0 , имеющего ненулевой коэффициент C при соответствующем λ собственном векторе x в разложении по базису из собственных векторов. При этом

$$z_k \rightarrow \lambda^k Cx \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В [1; 242] показано, что равенство (15) остается в силе и для матрицы, не обладающей простой структурой, при условии, что λ – единственное максимальное по модулю собственное значение единичной кратности. (Матрица, имеющая единственное собственное число с максимальным модулем, называется примитивной.)

Для проекционных матриц рассматриваемых моделей справедлива теорема Перрона – Фробениуса, по которой кратность максимального по модулю собственного числа равна единице. Как показано в [8; 64], матрицы Λ_i и L_i будут примитивными, если какие-то два соседних элемента их первых строк отличны от нуля. Для матрицы L_i , кроме того, для примитивности достаточно отличия от нуля хотя бы одного элемента r_i [2; 132]. Примитивность матриц $\Lambda^{(T)}$ и $L^{(T)}$ следует из того, что они являются произведениями примитивных матриц.

Таким образом, для получаемых с помощью проекционных матриц итерационных последовательностей векторов будут справедливы соотношения (15) и (16). Обозначим $\frac{(z_{k+1})_i}{(z_k)_i}$ через w_i^k .

В соответствии с (15), если $\lambda > 1$, то для любой координаты i начиная с некоторой итерации $w_i^k > 1$, и наоборот, неравенство $w_i^k > 1$ свидетельствует, что $\lambda > 1$. Аналогично, если начиная с некоторой итерации $w_i^k < 1$, то $\lambda < 1$. При этом из (16) следует, что $|(z_k)_i| \rightarrow \infty$ или $|(z_k)_i| \rightarrow 0$ соответственно.

Пусть теперь $\lambda = 1$. В этом случае $w_i^k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Характер стремления w_i^k к 1 может быть как монотонным, так и немонотонным.

О степени близости отношения w_i^k к величине λ на практике можно судить по совпадению (с некоторой точностью) значений этого отношения для разных значений индекса i [12; 331].

Таким образом, величина отношения w_i^k , полученная после некоторого количества итераций, может играть роль численного индикатора потенциального роста. Необходимое количество итераций определяется в каждом конкретном случае потребностью различить, какой именно из трех возможных вариантов для величины λ (больше, меньше, равно 1) имеет место.

В качестве примера рассмотрим упрощенный вариант детализированной модели, соответствующей модели оборота стада крупного рогатого скота, предложенной А. А. Трофимовым [11].

Исходные данные: предельный возраст особей $m = 12$, функции h, g зависят только от возраста особей и имеют вид: $h(\tau) = \{0,2, 0,05, 0,05, 0,05, 0,03, 0,03, 0,03, 0,03, 0,04, 0,04, 1\}$, $g(\tau) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0,4, 0,6, 0,4, 0,2\}$. Количество стадий $n = 3$, возрастные диапазоны стадий: $K_1 = \{1, 2, 3\}$, $K_2 = \{4, 5, 6, 7\}$, $K_3 = \{8, 9, 10, 11, 12\}$. Возрастная структура популяции $f(\tau) = \{0,15, 0,12, 0,1, 0,08, 0,08, 0,06, 0,1, 0,08, 0,05, 0,05, 0,05\}$, $T = 6$.

В рассматриваемом примере матрица Λ , детализированной модели не зависит от времени, $\Lambda^{(T)} = \Lambda^6$. Вид этих матриц не приводится ввиду их громоздкости. Элементы проекционных матриц стадийной модели вычисляются по форму-

лам (11), (14), и эти матрицы имеют вид соответственно:

$$L = \begin{bmatrix} 0,63 & 0 & 0,37 \\ 0,26 & 0,78 & 0 \\ 0 & 0,19 & 0,82 \end{bmatrix}, L^{(T)} = \begin{bmatrix} 0,07 & 0,86 & 0,15 \\ 0,26 & 0,15 & 0,69 \\ 0,47 & 0,64 & 0 \end{bmatrix}.$$

Максимальные по модулю собственные числа: $\lambda(\Lambda) = 1,010$, $\lambda(\Lambda^{(T)}) = 1,064$, $\lambda(L) = 1,014$, $\lambda(L^{(T)}) = 1,097$. Применение степенного метода дает следующие результаты: первые три значащие цифры отношения $\frac{(z_{p+1})_i}{(z_p)_i}$ и максимального

по модулю собственного числа совпадают для $\Lambda^{(T)}$ начиная с пятнадцатой итерации, а для $L^{(T)}$ – начиная со второй. (Начальные вектора z_0 имели единичные компоненты.)

Предложенные в данной статье матричные модели структурированных популяций применительно к задаче оборота стада сельскохозяйственных животных позволяют анализировать последствия управляющих воздействий на популяцию. Воздействия в виде изъятия части особей учитываются через изменение функции изъятия $h(\tau, t)$, а добавление особей в стадо учитывается через изменение функции $f(\tau, k)$, описывающей возрастную структуру популяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 620 с.
2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
3. Динамическая теория биологических популяций / Под ред. Р. А. Полуэктова. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. Ключкова И. Н. Обобщение теоремы о репродуктивном потенциале для матриц Логофета // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 2004. № 3. С. 45–48.
5. Логофет Д. О. Три источника и три составные части формализма популяции с дискретной стадийной и возрастной структурами // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 12. С. 11–22.
6. Логофет Д. О., Белова И. Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 4. С. 145–164.
7. Логофет Д. О., Ключкова И. Н. Математика модели Лефковича: репродуктивный потенциал и асимптотические циклы // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 10. С. 116–126.
8. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
9. Скалецкая Е. И., Фрисман Е. Я., Шапиро А. П. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука, 1979. 165 с.
10. Терновых К. С. Планирование на предприятии АПК. М.: Колос, 2006. 79 с.
11. Трофимов А. А., Чугин И. В. Моделирование оборота стада крупного рогатого скота и оптимальное планирование производства в агрохозяйстве // Проблемы информационной экономики. Вып. VI. Моделирование инновационных процессов и экономической динамики: Сб. науч. тр. / Под ред. Р. М. Нижегородцева. М.: Ленанд, 2006. С. 212–225 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.econ.asu.ru/lib/sborn/model2006/pdf/14.pdf>
12. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 656 с.
13. Buckland S. T., Newman K. B., Thomas L., Koesters N. B. State-space models for the dynamics of wild animal populations // Ecological Modelling. 2004. Vol. 171. P. 157–175.
14. Csetenyi A. I., Logofet D. O. Leslie model revisited: some generalizations for block structures // Ecological Modelling. 1989. Vol. 48. P. 277–290.
15. Newman K. B., Buckland S. T., Lindley S. T., Thomas L., Fernandez C. Hidden process models for animal population dynamics // Invited Paper for Special Feature of Ecological Applications. 2006. Vol. 16. P. 74–86.