Март, № 2 **Технические науки** **2012**

УДК 519.63

ГЕННАДИЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛЕСНИКОВ
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механики, Петрозаводский государственный университет
kolesnikovgn@yandex.ru
ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КУВШИНОВ
аспирант кафедры механики, Петрозаводский государственный университет
dak@ptz.ru

ДЕКОМПОЗИЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ

Предлагается метод декомпозиции конечно-элементной модели механической системы. По физическому смыслу модель рассматривается как система конечных элементов, взаимодействующих в узлах. Анализ контактного взаимодействия в узлах элементов приводит к декомпозиции математической модели в виде системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: метод декомпозиции, метод конечных элементов, контактное взаимодействие

Размерность задач, для решения которых применяется метод конечных элементов, имеет устойчивую тенденцию к росту. Увеличение быстродействия вычислительных систем решает только часть появляющихся в этой связи проблем. Приоритетным направлением в обеспечении эффективного использования возможностей вычислительной техники является развитие методов декомпозиции конечно-элементных алгоритмов. Обзоры работ в данной области исследований, актуальные проблемы и новые методы их решения представлены в [4], [7]. Для решения задач определенного класса может быть использован предлагаемый далее метод декомпозиции конечно-элементной модели.

Запишем в векторно-матричной форме уравнение движения конечно-элементной модели некоторой механической системы:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{P} + \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{N}}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$ и $\ddot{\mathbf{U}}$ – векторы (одномерные массивы) перемещений, скоростей и ускорений узлов соответственно; $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ – матрицы жесткости, демпфирования и масс соответственно; $\mathbf{P}$ – вектор внешних воздействий (внешних сил). В терминах метода перемещений строительной механики соотношение (1) можно интерпретировать как систему уравнений равновесия конечно-элементной модели [5; 10–15]. Уравнение (1) отличается от общепринятой формулировки [6] компонентом $\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{N}}$, где $\overline{\mathbf{C}}$ – матрица коэффициентов в уравнениях равновесия. Компонентами вектора $\overline{\mathbf{N}}$ являются силы и моменты (пары сил), появляющиеся в физической модели как результат контактного взаимодействия конечных элементов. Векторы $\overline{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{U}$ заранее не известны и подлежат определению как результат решения задачи.

Результатом внешнего воздействия и указанного выше контактного взаимодействия являются, в частности, деформации конечных элементов, линейные и угловые перемещения в узлах. Эти перемещения ведут к появлению соответствующих зазоров, если в физической модели нет связей, которые не допускали бы изменений линейных и угловых расстояний между каждой парой узлов контактирующих конечных элементов. Текущие и начальные значения зазоров ($\overline{\mathbf{D}}$ и $\overline{\mathbf{D}}_0$ соответственно) связаны с перемещениями узлов $\mathbf{U}$ соотношением

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{C}}^T\mathbf{U} + \overline{\mathbf{D}}_0. \qquad (2)$$

Из физического смысла контактного взаимодействия в узлах конечных элементов следует, что каждый столбец матрицы $\overline{\mathbf{C}}$ содержит только два ненулевых элемента, один из которых равен 1, другой – (-1). Заметим, что существует класс механических систем, в которых при некоторых воздействиях возможно появление зазоров, что рассмотрено, например, в [2], [3]. Далее рассматривается задача, по физическому смыслу которой зазоры равны нулю, то есть $\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{0}$ в формуле (2).

Дискретизация уравнения движения (1) по времени с использованием явной схемы с односторонними конечными разностями приводит на шаге i с учетом равенства (2) к следующим соотношениям [2]:

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_i = \widehat{\mathbf{P}}_i + \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{N}}; \quad \mathbf{C}^T\mathbf{U}_i = \mathbf{0}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{M}\tau^{-2} + \mathbf{K}\tau^{-1} + \mathbf{R}$, $\widehat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i + \tau^{-2}\mathbf{M}\mathbf{U}_{i-2} + (2\mathbf{M}\tau^{-2} + \mathbf{K}\tau^{-1})\mathbf{U}_{i-1}$, τ – шаг по времени, i – номер шага.

Пусть конечно-элементная модель разбита на n подструктур. Каждая подструктура содержит m конечных элементов, $m \geq 1$. Рассматривая независимо от других каждую подструктуру k, $k = 1, \ldots, n$, сформируем по аналогии с (3) матрицы $\mathbf{A}_i^{(k)}$, $\overline{\mathbf{C}}_i^{(k)}$, вектор $\widehat{\mathbf{P}}_i^{(k)}$. Не указывая индекс i, запишем соотношения вида (3) для подструктуры k. Получим:

$$\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{U}^{(k)} = \widehat{\mathbf{P}}^{(k)} + \overline{\mathbf{C}}^{T(k)}\overline{\mathbf{N}}; \quad \overline{\mathbf{C}}^{(k)}\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

Систему этих соотношений для всех $k = 1, \ldots, n$ можно записать в виде одного блочного векторно-матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\overline{\mathbf{C}}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \cdots & \mathbf{0} & -\overline{\mathbf{C}}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}^{(n)} & -\overline{\mathbf{C}}^{(n)} \\ \overline{\mathbf{C}}^{T(1)} & \overline{\mathbf{C}}^{T(2)} & \cdots & \overline{\mathbf{C}}^{T(n)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \\ \ldots \\ \mathbf{U}^{(n)} \\ \overline{\mathbf{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{P}}^{(1)} \\ \widehat{\mathbf{P}}^{(2)} \\ \ldots \\ \widehat{\mathbf{P}}^{(n)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Из (4) следует:

$$\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1(k)}(\widehat{\mathbf{P}}^{(k)} + \overline{\mathbf{C}}^{(k)}\overline{\mathbf{N}}). \quad (5)$$

Касаясь вопроса о существовании указанной в (5) обратной матрицы, отметим, что система с распределенными параметрами под действием движущейся сосредоточенной массы рассмотрена в статье [6], автором которой, в частности, доказано, что матрица коэффициентов при старших производных в уравнении вида (1) всегда обратима.

Используя (5) и учитывая, что, согласно (4),

$$\overline{\mathbf{C}}^T\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{C}}^{T(k)}\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{0},$$

получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{C}}^{T(k)}\mathbf{A}^{-1(k)}(\widehat{\mathbf{P}}^{(k)} + \overline{\mathbf{C}}^{(k)}\overline{\mathbf{N}}) = \mathbf{0}.$$

Отсюда находим:

$$\overline{\mathbf{N}} = -\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{C}}^{T(k)}\mathbf{A}^{-1(k)}\overline{\mathbf{C}}^{(k)}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{C}}^{T(k)}\mathbf{A}^{-1(k)}\widehat{\mathbf{P}}^{(k)}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), определим $\mathbf{U}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, задача определения векторов $\overline{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{U}$ решена.

Из физического смысла контактного взаимодействия конечных элементов (или подструктур) следует, что каждый столбец матрицы $\overline{\mathbf{C}}$ содержит только два ненулевых элемента, один из которых равен 1, другой – (-1). При этом каждый столбец блока $\overline{\mathbf{C}}^{(k)}$ содержит только один ненулевой элемент, равный +1 или -1. Поэтому матрица $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n}(\overline{\mathbf{C}}^{T(k)}\mathbf{A}^{-1(k)}\overline{\mathbf{C}}^{(k)})$ является диагональной. Учет особенностей структуры блока $\overline{\mathbf{C}}^{(k)}$ ведет к существенному упрощению вычислений по формулам (6) и (5).

Применение представленного метода декомпозиции конечно-элементной модели в алгоритмах расчета позволяет уменьшить затраты времени и объем требуемой оперативной памяти, что особенно важно при итерационном решении нелинейных задач [1], [3]. Кроме того, создаются новые возможности для параллельных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Численное моделирование колебаний контактной подвески с учетом геометрической нелинейности // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 1(44). С. 98–103.
2. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Численное моделирование полукоэрцитивного механического взаимодействия токоприемника и контактной сети при высокой скорости электровоза // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2008. № 3(94). С. 83–88.
3. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Численное моделирование динамического взаимодействия токоприемников и контактной сети // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2012. № 1. С. 9–12.
4. Копысов С. П., Новиков А. К. Метод декомпозиции для параллельного адаптивного конечно-элементного алгоритма // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 141–154.
5. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 304 с.
6. Пестерев А. В. К задаче о движущейся массе // Труды Института системного анализа РАН. 2005. Т. 14. С. 217–221.
7. Фиалко С. Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. М.: СКАД-СОФТ: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2000. 160 с.