

ВАЛЕРИЙ ИВАНОВИЧ СЫСУН

доктор физико-математических наук, профессор кафедры
электроэнергетики и электроники физико-технического фа-
культета, Петрозаводский государственный университет
vsysun@psu.karelia.ru

ВЛАДИМИР СТАНИСЛАВОВИЧ ИГНАХИН

аспирант кафедры электроники и электроэнергетики фи-
зики-технического факультета, Петрозаводский государ-
ственный университет
art101@mail.ru

К РАДИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИОННОГО ТОКА НА ЗОНД: II. УЧЕТ ОБЪЕМНОЙ ИОНИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СТОЛКНОВЕНИЙ С АТОМАМИ

В настоящей работе рассматривается ионный ток на сферический и цилиндрический зонды с учетом ионизации и столкновений с атомами в области возмущения плазмы. В предположении нулевой температуры ионов (приближение радиального дрейфа) получено выражение для концентрации ионов. Вычислены вольт-амперные характеристики зондов для широкого диапазона параметров (размер зонда, частота ионизации, длина свободного пробега ионов). Получены аппроксимирующие выражения для вольт-амперных характеристик в предельных случаях большого (плоского) и малого зонда.

Ключевые слова: зондовая диагностика, плазма низкого давления, радиальная теория, область возмущения, объемная ионизация

ВВЕДЕНИЕ

Радиальная теория ионного тока на зонд в плазме низкого давления впервые предложена в работе [7] и развивалась в последующем [8], [12], [16], [14]. Приближение радиального дрейфа наиболее применимо в случае, когда ионная температура T_i близка к нулю и выполняется приближение бесстолкновительного движения. При этом даже редкие столкновения ионов с атомами разрушают орбитальное движение частиц и сильно влияют на величину ионного тока [6], [1]. Вследствие этого радиальная теория дает лучший результат при наличии редких столкновений, чем более строгая орбитальная теория [10], [15]. В случае же частых столкновений радиальная теория дает завышенное значение величины ионного тока.

В радиальной теории пренебрегается орбитальным моментом ионов (полагается T_i / T_e , где T_e – температура электронов), которые движутся радиально со скоростями, определяемыми локальным потенциалом и законом сохранения энергии. В этом случае возможно численное решение уравнения Пуассона без разбиения на области квазинейтральной плазмы и слоя [7]. Ионный ток задается на бесконечности, а ионизацией в объеме пренебрегается. Концентрация электронов предполагается распределенной по Больцмановскому закону $n_e = n_0 \exp(\frac{e\varphi}{kT_e})$, где n_0 – концентрация невозмущенной плазмы. Уравнение Пуассона соответственно для цилиндрического и сферического случая запишется:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[\frac{I_3}{2\pi r^2 e \sqrt{-2e\varphi/M}} - n_0 \exp(\frac{e\varphi}{kT_e}) \right], \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[\frac{I_3}{4\pi r^2 e \sqrt{-2e\varphi/M}} - n_0 \exp(\frac{e\varphi}{kT_e}) \right]. \quad (2)$$

При заданном ионном токе I_3 эти уравнения интегрировались численно [2], [3] при граничных условиях: $r \rightarrow \infty$, $n \rightarrow n_0$, $\varphi \rightarrow 0$, $d\varphi / dr \rightarrow 0$ для отношений радиуса зондов к электронному дебаевскому радиусу $\frac{r_3}{\lambda_0} \geq 0,25$ – цилиндр и $\frac{r_3}{\lambda_0} \geq 0,05$ – сфера. В [14] рассчитывался плавающий потенциал сферического зонда в широком диапазоне $10^{-4} \leq \frac{r_3}{\lambda_0} \leq 10^4$ для аргона и гелия, но вольт-амперные характеристики не рассчитывались.

Учет столкновений в радиальной теории при низких и промежуточных давлениях проведен в работе [3]. После столкновения в точке r' ионы стартуют с нулевой скоростью и двигаются чис-

то радиально со скоростью $v_i = \sqrt{\frac{2e|\varphi(r) - \varphi(r')|}{M}}$.

Вероятность того, что ион, испытавший столкновение в точке r' , дойдет до точки r без рассеяния, определяется экспонентой $\exp(-\frac{(r'-r)}{\lambda_i})$, где λ_i – длина пробега иона. Концентрация определяется путем деления потока ионов на их скорость и интегрированием по всем точкам рассеяния r' :

$$n_i = \frac{j_3 r_3^\alpha}{e \lambda_i r^\alpha} \int_r^\infty \frac{\exp(-\frac{(r'-r)}{\lambda_i}) dr'}{\sqrt{2e(\varphi(r') - \varphi(r)) / M}}, \quad (3)$$

где j_3 – плотность тока на зонд, $\alpha = 0$ – плоский случай, $\alpha = 1$ – цилиндрический случай, $\alpha = 2$ – сферический случай.

Приравниванием концентрацию ионов (3) к концентрации электронов, распределенной по Больцмановскому закону, в [3] получено уравнение, связывающее потенциал, концентрацию в невозмущенной области и ионный ток. Численное решение начиналось на больших расстояниях с аналитического решения $\varphi(r') - \varphi(r) = E \cdot (r' - r)$, $E = j / e n \mu_i$, где μ_i – подвижность ионов. Вторая граница (радиус слоя) определялась обращением $\frac{d\varphi}{dr}$ в бесконечность.

Ограничением результатов работы [3] является приближение квазинейтральности, а также, как и в [7], [8], [12], отсутствие учета ионизации в объеме, что требует задания ионного тока на бесконечности. Иначе без ионизации вся плазма конечных размеров уйдет на зонд.

Ионизация в объеме учитывается в работах по пристеночному потенциалу, когда стенка интерпретируется как большой зонд. В основополагающей работе Тонкса и Ленгмюра [17] получено уравнение «плазма-слой»:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{z}{r^\alpha} \int_0^r \frac{r'^\alpha n_0 \exp(-\frac{e\varphi(r')}{kT_e}) dr'}{\sqrt{2e(\varphi(r') - \varphi(r))/M}} - n_0 \exp(-\frac{e\varphi(r)}{kT_e}) \right\}, \quad (4)$$

здесь z – частота ионизации, производимой одним электроном, $\frac{r'^\alpha}{r^\alpha} z n_e(r') dr'$ – плотность потока ионов в r , образовавшихся в элементе dr' .

Численные расчеты выполнены для области квазинейтральной плазмы, где принималось $n_i = n_e$. Результаты [17] показали, что учет генерации ионов приводит к возрастанию потенциала и средней скорости ионов на границе плазмы и уменьшению ионного тока на слой. Это отклонение от случая отсутствия генерации при внешней стенке возрастает с переходом от плоской к цилиндрической и далее к сферической геометрии. Впоследствии результаты [17] уточнились в [13], [9], [11].

В [5] рассмотрен учет объемной ионизации в радиальной теории при конечной области возмущения плазмы " r_0 ". Применено уравнение «плазма-слой» Ленгмюра (3) для ионного тока, но с обратными граничными условиями: на внешней границе $r = r_0$ принималось $\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{dr} = 0$.

В работе определяли зависимости плавающего потенциала зонда (пылевой частицы в плазме) и связанного с ней значения r_0 / λ_i от частоты ионизации. Столкновения с атомами не учитывались.

Отсутствие учета объемной ионизации в существующих на сегодняшний день теориях ионного тока на зонд в плазме низкого давления требует увеличения области возмущения до бесконечности, в противном случае вся плазма конечных размеров уйдет на зонд. Помимо влияния на ионный ток, конечное значение области

возмущения плазмы зондом определяет пространственное разрешение метода. Пространственное разрешение часто является принципиально важным моментом и тесно связано с вопросом возможности или невозможности применения данного метода вообще. В связи с этим актуальной задачей является анализ влияния ионизации на ионный ток на зонд в плазме низкого давления.

В настоящей работе рассматривается ионный ток на сферический и цилиндрический зонды с учетом ионизации в приближении холодных ионов. Вычислены вольт-амперные характеристики для безразмерных параметров $r_0 / \lambda_i = 0,0001 \div 10$, $A = z / \omega_i = 0,02 \div 5$, $\lambda_i / \lambda_o = 0,01 \div \infty$, где ω_i – ионная плазменная частота.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА

Пусть r_0 – область возмущения плазмы. В [2], [4] область возмущения определяется объемом плазмы вокруг зонда, в котором при пренебрежении объемной рекомбинацией число образующихся в единицу времени ионов за счет ионизации равно току на зонд. В приближении радиального движения это определение соответствует нулевой дрейфовой скорости ионов на границе области возмущения. В единице объема за единицу времени образуется $n_e z$ ионов. Все ионы, поступающие на зонд, создаются внутри r_0 . Ионы, образовавшиеся вне r_0 , уходят на стенку и электроды. Этот уход и определяет частоту ионизации, производимую одним электроном, $z \sim \frac{j_{cm} s_{cm}}{N}$, где N – полное число электронов в объеме, j_{cm} , s_{cm} – плотность ионного тока на стенку и площадь стенки.

Рассмотрим формирование потока ионов на зонд внутри r_0 . На элементе пути иона dr' образуется доля новой плотности тока:

$$dj = e n_e(r') z dr' + \frac{j dr'}{\lambda_i}. \quad (5)$$

Вероятность столкновения пропорциональна $\frac{dr'}{\lambda_i}$, вероятность пройти путь r есть $\exp(-\frac{r}{\lambda_i})$.

Тогда до точки r от этой плотности тока дойдет

$$dj \exp\left[-\frac{(r'-r)}{\lambda_i}\right] \frac{r'^\alpha}{r^\alpha}. \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) удовлетворяют условию сохранения потока:

$$j(r) = \int_{r_0}^r \frac{r'^\alpha}{r^\alpha} \exp\left[-\frac{(r'-r)}{\lambda_i}\right] dj = e \int_{r_0}^r \frac{r'^\alpha}{r^\alpha} n_e(r') z dr'. \quad (7)$$

Все ионы доли тока (6) будут иметь скорость $\sqrt{\frac{2e}{M} [\varphi(r') - \varphi(r)]}$. Разделив долю потока на скорость, получим долю концентрации d_n . Полная концентрация в r будет равна

$$n(r) = \frac{1}{r^\alpha} \int_r^{r_0} \frac{r'^\alpha [n_e(r')z + \frac{j(r')}{e\lambda_i}] \exp\left[-\frac{(r'-r)}{\lambda_i}\right] dr'}{\sqrt{\frac{2e}{M}[\varphi(r') - \varphi(r)]}}, \quad (8)$$

$$\text{где } j(r') = \frac{e}{r'^\alpha} \int_{r'}^{r_0} n_e(r'') z r''^\alpha dr''.$$

Введем безразмерные параметры:

$$x = \frac{r}{\lambda_\alpha} = \frac{re}{\sqrt{\varepsilon_0 k T_e / n_0}}; \quad U = \frac{e\varphi}{k T_e}; \quad n' = \frac{n}{n_0}; \quad l_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_\alpha};$$

$$A = \frac{z\lambda_\alpha}{\sqrt{k T_e / M}} = \frac{z}{\omega_i}; \quad j' = \frac{j}{e n_0 \sqrt{k T_e / M}}; \quad \text{здесь } \omega_i -$$

плазменная ионная частота, j – плотность тока, λ_α – электронный дебаевский радиус.

Подставляя выражение (8) в уравнение Пуассона при больцмановском распределении концентрации электронов, получим в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{x} \frac{\partial U}{\partial x} = \exp(U(x)) - \frac{A}{x^\alpha} \int_x^{x_0} \frac{[x'^\alpha \exp(U(x')) + \frac{1}{l_i} \int_{x'}^{x_0} \exp(U(x'')) x''^\alpha dx''] \exp\left[-\frac{(x'-x)}{l_i}\right] dx'}{\sqrt{2[U(x') - U(x)]}}. \quad (9)$$

Решение (9) от границы области возмущения затруднено нулевыми начальными условиями для потенциала и его градиента. В [5] для начального от границы тонкого слоя, считающегося плоским, $\Delta x \ll x_0 = x_N$ получено приближенное аналитическое решение в предположении $n'_e = 1$; $n'_N = \text{const}$:

$$U(x) = (1 - n'_N) \frac{(x_N - x)^2}{2}, \quad (10)$$

$$n'_N = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B}{27} + \frac{B^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B}{27} + \frac{B^2}{4}}}, \quad (11)$$

где $B = \frac{A^2 \pi^2}{4}$. Однако при распространении решений (10, 11) на достаточно толстый слой плазмы, особенно при больших x_N , где $n'_N \rightarrow 1$, возникают неустойчивости счета. Ввиду этого методом последовательных приближений решение (10) было уточнено:

$$U(x) = (1 - n'_N) \frac{(x_N - x)^2}{2} (1 + \gamma \frac{x_N - x}{x_N}), \quad (12)$$

где $\gamma = \frac{1,363 n'_N - 1}{1,818 n'_N - 1,5}$ – сферы и $\gamma = \frac{1,363 n'_N - 1}{3,636 n'_N - 3}$ – цилиндр.

$$n'_{N-1} = n'_N \left[1 + \frac{h}{x_N} \left[1 - \frac{(2 + \gamma)}{\pi} \right] \right], \quad (13)$$

h – шаг дискретизации координаты. Эти значения потенциала и концентрации принимались в первой от границы точке x_{N-1} . Для нахождения

потенциала в следующих промежуточных точках использовалась трехточечная параболическая интерполяция для значений $U(x)$:

$$2U_x = 2U_j + a_j \left(\frac{x - x_j}{h} \right)^2 + b_j \frac{x - x_j}{h}, \quad \text{где}$$

$$a_j = U_j - 2U_{j+1} + U_{j+2}, \quad b_j = -3U_j + 4U_{j+1} - U_{j+2}.$$

Далее на каждом шаге h использовалось разложение экспоненты в ряд $\exp U_x \approx (1 + U_x - U_j) \exp U_j$ и аналитические решения упрощенных таким образом интегралов.

Результаты расчетов приведены в виде графиков на рис. 1–3.

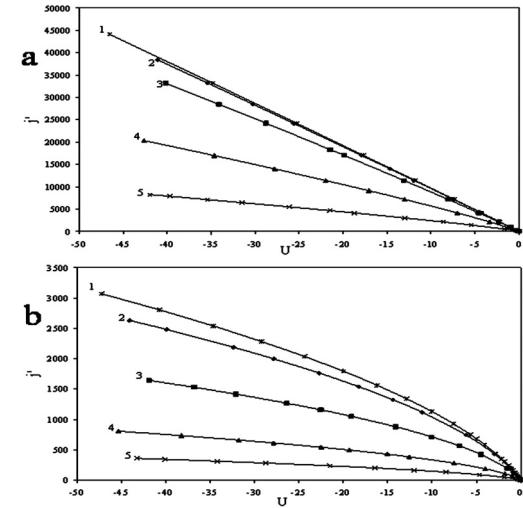


Рис. 1. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 0,001$ и различных длин свободного пробега l_i , $A = 0,01$: а) сферический зонд: 1 – $l_i = \infty$; 2 – $l_i = 10$; 3 – $l_i = 1$; 4 – $l_i = 0,1$; 5 – $l_i = 0,01$; б) цилиндрический зонд: 1 – $l_i = \infty$; 2 – $l_i = 10$; 3 – $l_i = 1$; 4 – $l_i = 0,1$; 5 – $l_i = 0,01$

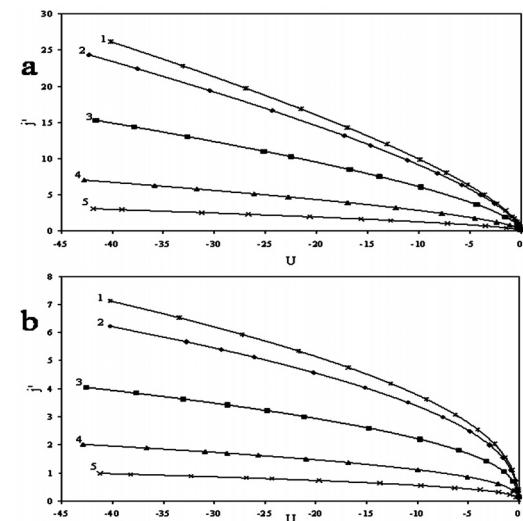


Рис. 2. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 1,0$ и различных длин свободного пробега l_i , $A = 0,10$: а) сферический зонд: 1 – $l_i = \infty$; 2 – $l_i = 10$; 3 – $l_i = 1$; 4 – $l_i = 0,1$; 5 – $l_i = 0,01$; б) цилиндрический зонд: 1 – $l_i = \infty$; 2 – $l_i = 10$; 3 – $l_i = 1$; 4 – $l_i = 0,1$; 5 – $l_i = 0,01$

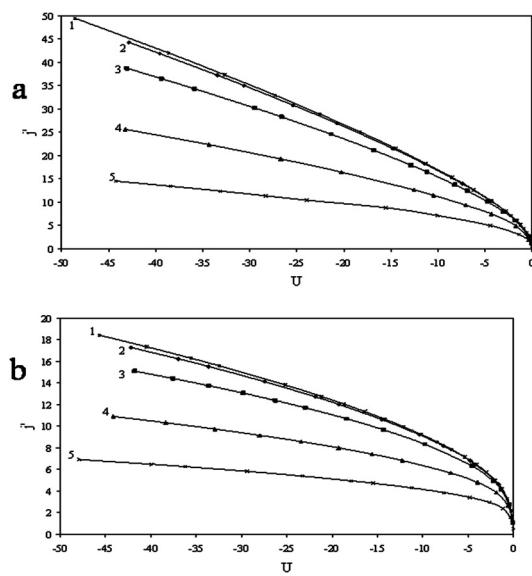


Рис. 3. Зависимости величины j' от безразмерного потенциала U для размера зонда $a = 1,0$ и различных длин свободного пробега l_i , $A = 5$: а) сферический зонд: 1 – $l_i = \infty$; 2 – $l_i = 10$; 3 – $l_i = 1$; 4 – $l_i = 0,1$; 5 – $l_i = 0,01$; б) цилиндрический зонд: 1 – $l_i = \infty$; 2 – $l_i = 10$; 3 – $l_i = 1$; 4 – $l_i = 0,1$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

С уменьшением длины свободного пробега ионный ток уменьшается монотонно при всех потенциалах зонда и частотах ионизации. Однако это влияние столкновений ионов с атомами ослабляется при увеличении частоты ионизации в объеме и при уменьшении радиуса зонда.

В случае большой частоты столкновений $l_i \ll a$ можно получить приближенные аналитические выражения для предельных случаев $a \gg 1$, $a \ll 1$. Скорость иона в данном случае определяется локальным электрическим полем, где $v' = \sqrt{\frac{2E'l_i}{\pi}}$, где E' – безразмерная напряженность поля. Рассматриваемую область возмущения можно разбить на две части: 1) $U < 1$, где полагается $n'_i = 1$; 2) $U > 1$, где полагается $n'_i = 0$ и ионный ток сохраняется. Тогда для плотности ионного тока во внешней области ($U < 1$) получим $j' = A(x_0 - x)$, $j' = \frac{A(x_0^2 - x^2)}{2x}$, $j' = \frac{A(x_0^3 - x^3)}{3x^2}$ для плоской, цилиндрической и сферической геометрии соответственно. Так как $j' = n'v'$, для концентрации ионов получим:

$$n'_i(x) \approx \frac{A\sqrt{\pi}}{\sqrt{2|E'(x)|l_i}}(x_0 - x) \text{ – плоский случай,}$$

$$n'_i(x) \approx \frac{A\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{2|E'(x)|l_i}}(x_0^2 - x^2) \text{ – цилиндрический случай,}$$

$n'_i(x) \approx \frac{A\sqrt{\pi}}{3x^2\sqrt{2|E'(x)|l_i}}(x_0^3 - x^3)$ – сферический случай.

При $A \gg 1$: $n'_i \gg n'_e$. Подставим значение концентрации ионов в уравнение Пуассона, пренебрегая концентрацией электронов. Тогда при $U > 1$ получим следующие выражения.

$a \gg 1$ – плоский случай:

$$j' = 1,46l_i^{1/7}A^{5/7} = A(x_0 - x), \quad (14)$$

$a \ll 1$ – сфера и цилиндр соответственно:

$$j'_3 \approx \frac{0,91A^{2/5}l_i^{3/10}}{a^{11/10}}U_3^{9/10}; \quad j'_3 \approx \frac{0,9A^{3/7}l_i^{2/7}}{a\ln(\frac{x_0}{a})}U_3^{6/7}. \quad (15)$$

На рис. 4–5 представлено сравнение результатов численного расчета с расчетом по аппроксимирующими формулам (14, 15) в соответствующих случаях.

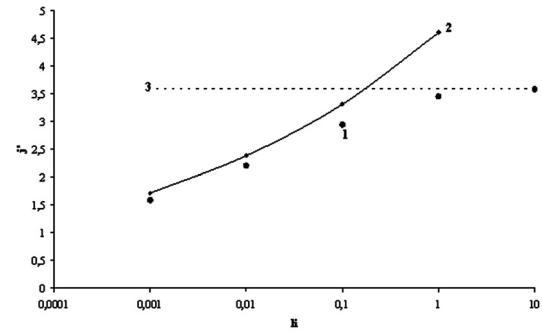


Рис. 4. Сравнение результатов численного расчета с расчетом по аппроксимирующей формуле 14 (плоский случай), $U = 30$: 1 – результаты численного расчета; 2 – расчет по аппроксимирующей формуле 14; 3 – бесстолкновительный случай. По оси абсцисс отложена безразмерная длина свободного пробега, по оси ординат – безразмерная плотность тока

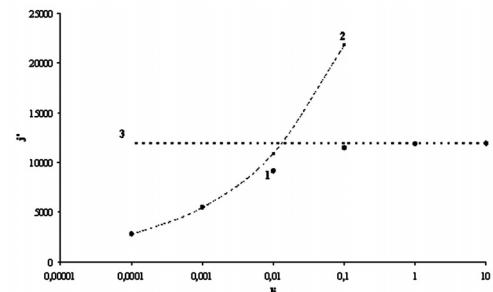


Рис. 5. Сравнение результатов численного расчета с расчетом по аппроксимирующей формуле 15 (сферический случай), $a = 0,001$, $U = 30$: 1 – результаты численного расчета; 2 – расчет по аппроксимирующей формуле 15; 3 – бесстолкновительный случай. По оси абсцисс отложена безразмерная длина свободного пробега, по оси ординат – безразмерная плотность тока

При $A \ll 1$ в области слабых полей $U < 1$ можно положить $n'_i \approx n'_e = 1$. Тогда при больших зондах ($a \gg 1$) будем иметь $E' = \frac{\pi}{2l_i}A^2(x_0 - x)^2$,

$U = \frac{j'^3 \pi}{6l_i A}$ до $U = 1$. При полях $U \gg 1$ плотность тока сохраняется (насыщение):

$$j'_s = \left(\frac{6l_i A}{\pi} \right)^{1/3}. \quad (16)$$

На рис. 6 представлено сравнение результатов численного расчета с расчетом по аппроксимирующей формуле (16).

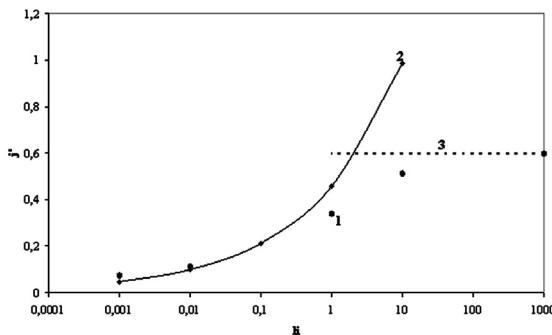


Рис. 6. Сравнение результатов численного расчета с расчетом по аппроксимирующей формуле 16 (плоский случай), $U = 30$: 1 – результаты численного расчета; 2 – расчет по аппроксимирующей формуле 16; 3 – бесстолкновительный случай. По оси абсцисс отложена безразмерная длина свободного пробега, по оси ординат – безразмерная плотность тока

При промежуточных случаях можно использовать графики рис. 1–3, проведя соответствующую перенормировку.

Следует отметить, что при малых зондах ($a \ll 1$) соотношение $l_i \ll a$ может выполняться только при больших давлениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Столкновения ионов с атомами монотонно уменьшают ионный ток, однако это влияние ослабляется при увеличении частоты ионизации в объеме и при уменьшении радиуса зонда. Следует отметить, что типичное значение параметра « A » в разрядах низкого давления в трубках с радиусом $r_{cm} - A \sim \frac{\lambda_d}{r_{cm}} \ll 1$, но в пылевой плазме, где потери заряженных частиц возрастают, этот параметр может существенно увеличиться.

В предельных случаях $a \gg 1$ (плоский зонд) и для практических расчетов целесообразно пользоваться аппроксимирующими выражениями из раздела 3.

Данная работа была выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, контракт 16.740.11.0329.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зобнин А. В., Нефедов А. П., Синельщиков В. А., Фортов В. Е. О заряде пылевых частиц в газоразрядной плазме низкого давления // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 3. С. 554–560.
2. Методы исследования плазмы: Пер. с англ. / Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. М.: Мир, 1971. 552 с.
3. Немчинский В. А. Расчет ионного тока насыщения на зонд при промежуточных давлениях в пределе холодных ионов // ЖЭТФ. 1970. Т. 40. № 2. С. 416.
4. Сысун В. И. Ионный ток на зонд при промежуточных давлениях и область возмущения плазмы зондом // Физика плазмы. 1978. Т. 4. № 4. С. 931–937.
5. Сысун В. И., Хахаев А. Д., Олещук О. В., Шелестов А. С. Заряд и потенциал пылевой частицы в плазме низкого давления с учетом ионизации в области возмущения // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 9. С. 834–841.
6. Швейгерт В. А., Швейгерт И. В., Беданов В. М. и др. Структура кристалла микрочастиц в плазме высокочастотного разряда // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 3. С. 877–894.
7. Allen J. E., Boyd R. L. F., Reynolds P. The Collection of Positive Ions by a Probe Immersed in a Plasma // Proc. Phys. Soc. 1957. Vol. B70. № 3. P. 297–305.
8. Allen J. E., Turrin A. The Collection of Positive Ions by a Probe Immersed in a Plasma // Proc. Phys. Soc. 1964. Vol. 83. № 1. P. 177–179.
9. Auer R. L. The Role of Ion Currents in the Formation of Space Charge Sheats in a Low Pressure Arc // Nuovo Cimento. 1961. Vol. 22. P. 548–564.
10. Bernstein I. B., Rabinowitz I. N. Theory of Electrostatic Probes in a Low-Density Plasma // Phys. Fluid. 1959. Vol. 2. № 2. P. 112–121.
11. Caruso A., Cavaliere A. The Structure of the Collisionless Plasma-sheath Transition // Nuovo Cimento. 1962. Vol. 26. P. 1389–1404.
12. Chen F. F. Numerical Computations for Ion Probe Characteristics in a Collisionless Plasma // J. Nucl. Energy. Part C. 1965. Vol. 7. № 1. P. 47–67.
13. Harrison E. R., Thomson W. B. The Low Pressure Plane Symmetric Discharge // Proc. Phys. Soc. 1959. Vol. 74. № 2. P. 145.
14. Kennedy R. V., Allen J. E. The Floating Potential of Spherical Probes and Dust Grains. I. Radial motion theory // J. Plasma Physics. Part 4. 2002. Vol. 67. P. 243–250.
15. Laframboise J. G. The theory of spherical and cylindrical probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest / Institute for aerospace studies, University of Toronto (UTIAS), Report 100, 1966.
16. Nairn C. M. C., Annaratone B. M., Allen J. E. On the Theory of Spherical Probes and Dust Grains // Plasma Sources Sci. Technol. 1998. Vol. 7. № 4. P. 478–491.
17. Tonks L., Langmuir I. A General Theory of the Plasma of an Arc // Phys. Rev. 1929. Vol. 34. № 6. P. 876–922.