Март, № 2 **Физико-математические науки** **2012**

УДК 515.12

АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ ИВАНОВ
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии и топологии математического факультета, Петрозаводский государственный университет
ivanov@petrsu.ru

ТЕОРЕМА КАТЕТОВА О КУБЕ И ПОЛУНОРМАЛЬНЫЕ ФУНКТОРЫ

В предположении принципа Йенсена доказано существование неметризуемого компакта X такого, что для любого полунормального функтора F и любого n разность $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ совершенно нормальна и $F_n(X)$ наследственно сепарабельно. В частности, в предположении принципа Йенсена существует такой неметризуемый компакт X, что для любого n X^n наследственно сепарабельно и $X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально, где Δ_n – обобщенная диагональ X^n.

Ключевые слова: полунормальный функтор, принцип Йенсена, теорема Катетова о кубе, наследственная сепарабельность, совершенная нормальность

Классическая теорема М. Катетова утверждает, что если для компакта X пространство X^3 наследственно нормально, то X метризуем. В. В. Федорчук [6] доказал обобщение этой теоремы для произвольного нормального функтора* F, действующего в категории *Comp* компактов и непрерывных отображений: если степень F не меньше 3 и $F_3(X)$ наследственно нормально, то X метризуемо. Как заметил Т. Ф. Жураев, требование наследственной нормальности $F_3(X)$ в теореме Федорчука можно ослабить до требования наследственной нормальности $F_3(X) \setminus X$ (в теореме Катетова для метризуемости X достаточно наследственной нормальности $X^3 \setminus \Delta$). Задача распространения теоремы Федорчука на более широкие классы ковариантных функторов F: *Comp* $\to$ *Comp* приводит к необходимости рассмотрения степенного спектра $sp(F)$ функтора F, который определяется как множество степеней точек пространств вида $F(X)$ [4]. В этом направлении Т. Ф. Жураевым [2] получен следующий частный результат для функтора суперрасширения λ: если $\lambda_4(X) \setminus X$ наследственно нормально, то X метризуемо. Замена индекса 3 на 4 в теореме Жураева не случайна: дело в том, что 4 есть третий по счету элемент степенного спектра $sp(\lambda) = \{1, 3, 4, \ldots\}$.

В настоящей работе показано, что если F – полунормальный функтор, удовлетворяющий некоторому комбинаторному условию (*), и $sp(F) = \{1, m, n, \ldots\}$, то наследственная нормальность $F_n(X) \setminus X$ влечет метризуемость X. Заметим, что для любого полунормального функтора F метризуемость X всегда следует из совершенной нормальности $F_m(X)$. В то же время в работе построен пример функтора F, $sp(F) = \{1, 2, 3\}$, удовлетворяющего всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, для которого в предположении принципа Йенсена ♦ существует неметризуемый компакт X такой, что $F_3(X) \setminus X$ совершенно нормально. Упомянутый компакт также обладает следующим свойством: для любого полунормального сохраняющего вес функтора F и любого $n \in sp(F)$ разность $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ совершенно нормальна и $F_n(X)$ наследственно сепарабельно (теорема 3). Этот результат является новым даже для функторов возведения в степень n (теорема 2(♦)): существует неметризуемый совершенно нормальный компакт X такой, что для любого n X^n наследственно сепарабельно и $X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально (здесь Δ_n – обобщенная диагональ, X^n – множество точек, имеющих хотя бы две совпадающие координаты). Более того, любое замкнутое подмножество $F \subset X^n$, в котором Δ_n нигде не плотно, имеет тип G_δ в X^n.

Отметим, что Грюнхаге [11] в предположении *CH* построил пример неметризуемого компакта Y, для которого Y^2 наследственно сепарабельно, $Y^2 \setminus \Delta$ совершенно нормально и Y^2 наследственно нормально. В работе показано, что компакт X из теоремы 2 имеет не наследственно нормальный квадрат. Таким образом, можно утверждать, что наследственная сепарабельность X^2 и совершенная нормальность $X^2 \setminus \Delta$ «наивно» не влекут наследственную нормальность X^2.

Напомним некоторые определения, касающиеся ковариантных функторов в категории *Comp*. Функтор F называется *мономорфным*, если для любого вложения i: $Y \to X$ отображение $F(i)$: $F(Y) \to F(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора F и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $F(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $F(i)(F(Y))$ пространства $F(X)$.

Мономорфный функтор F *сохраняет пересечения*, если для любого компакта X и любой системы $\{Y_\alpha: \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$F(\cap\{Y_\alpha: \alpha \in A\}) = \cap\{F(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Если F – мономорфный функтор, то для любой точки $a \in F(x)$ *носитель* $supp(a)$ определен следующим образом:

$$supp(a) = \cap\{Y \subset X: a \in F(Y)\}.$$

Для любого натурального n положим

$$F_n(X) = \{\alpha \in F(X): |supp(a)| \leq n\}.$$

Если F – мономорфный сохраняющий пересечения функтор, то подпространство $F_n(X)$ замкнуто в $F(X)$ для любого X и любого n. Более того, соответствие $X \to F_n(X)$ однозначно определяет подфунктор F_n функтора F (см. [10, предложение 1.5]).

Функтор F называется *непрерывным*, если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра. Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным*, если он сохраняет точку и пустое множество [10]. Если F – полунормальный функтор, то для любого натурального n функтор F_n также является полунормальным. При этом $F_1(X) = X$ и мы можем считать X подпространством $F(X)$. Если F – полунормальный функтор и f: $X \to Y$, то для любого $a \in F(X)$ $f(supp(a)) \supset \supset supp(F(f)(a))$ (см. [10]).

Функтор F *сохраняет прообразы*, если для любого отображения f: $X \to Y$ и любого $A \subset Y$

$$(F(f))^{-1} F(A) = F(f^{-1} A).$$

Функтор F называется *эпиморфным*, если он сохраняет эпиморфизмы. Функтор F *сохраняет вес*, если для любого бесконечного X $w(X) = w(F(X))$. Полунормальный эпиморфный функтор F, сохраняющий вес и прообразы, называется *нормальным* [7], [8].

Следующая ниже конструкция отображения π_n предложена в [1]. В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, \ldots, n{-}1\}$. Отображение

$$\pi_n: X^n \times F(n) \to F(X)$$

определяется равенством $\pi_n(x, \xi) = F(x)(\xi)$, в котором каждая точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ отождествляется с отображением x: $n \to \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Для любого непрерывного функтора F и любого компакта X отображение π_n непрерывно [1]. Как показано в [10], для полунормального функтора F $Im\pi_n = F_n(X)$. Следуя [10], для каждого $n \geq 2$ введем обозначения:

$$F_{nn}(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X),\ \Pi_n(X) = \pi_n^{-1}(F_{nn}(X)).$$

Степенным спектром F называется [4] следующее множество:

$$sp(F) = \{k: k \in N, F_{kk}(k) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что степенной спектр любого полунормального функтора содержит 1. В [4] показано, что для любого подмножества $K \subset N$ $(1 \in K)$ существует функтор exp^K, удовлетворяющий всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, для которого $sp(exp^K) = K$.

Пусть F – полунормальный функтор и $sp(F) = \{1, m, n, \ldots\}$ (элементы $sp(F)$ записаны в порядке возрастания). Определим отображение φ_{mn}: $n \to m$ следующим образом: $\varphi_{nm}(i) = i$ при $i < m$, $\varphi_{nm}(i) = m - 1$ при $i \geq m$. Будем говорить, что F удовлетворяет условию (*), если

$$F(\varphi_{nm})\,(F_{nn}(n)) \cap F_{mm}(m) \neq \varnothing.$$

Заметим, что условие (*) следует из свойства финитно строгой эпиморфности функтора F, которое рассматривалось в [4] и [5]. Таким образом, условию (*) удовлетворяют все конечные композиции рассмотренных в [5] функторов λ, P, exp, N^k $(k \geq 2)$ и упомянутый выше функтор exp^K.

Пусть X – компакт, $n \geq 2$ и Δ_n – подмножество X^n, состоящее из точек, у которых хотя бы две координаты совпадают (Δ_n – обобщенная диагональ X^n).

Предложение 1. *Если Δ_n является G_δ-множеством в X^n, то X метризуем.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_{n-1}$ – попарно различные точки в X и пусть U – окрестность x_{n-1}, замыкание которой $[U]$ не содержит $x_1, \ldots, x_{n-2}$. Тогда имеет место равенство

$$(\{x_1\}\times\ldots\times\{x_{n-2}\}\times[U]^2) \cap \Delta_n = \{x_1\}\times\ldots\times\{x_{n-2}\}\times\Delta_{[U]}.$$

Следовательно, диагональ $\Delta_{[U]}$ является G_δ-множеством в $[U]^2$ и, значит, $[U]$ метризуемо.

Из локальной метризуемости X следует его метризуемость.

Теорема 1. *Пусть F – полунормальный функтор, удовлетворяющий условию (*), и $sp(F) = \{1, m, n, \ldots\}$. Если для компакта X пространство $F_n(X)\setminus X$ наследственно нормально, то X метризуем.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда в X имеются по крайней мере две неизолированные точки. Выберем точку $\delta \in F_{nn}(n)$ так, что $F(\varphi_{mn})(\delta) = \eta \in F_{mm}(m)$ (такая точка существует в силу условия (*)). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – набор различных точек из X, где x_1 не является изолированной точкой, и пусть U и V – окрестности x_1 и x_m соответственно такие, что $x_2, \ldots, x_{m-1} \notin U \cup V$ и $[U] \cap [V] = \varnothing$. Рассмотрим в X^n множество $T = [U]\times\{x_2\}\times\ldots\times\{x_{m-1}\}\times[V]^{n-m+1}$ и положим

$$f = \pi_n|_{T\times\{\delta\}}: T \times \{\delta\} = T \to F_n(X).$$

Обозначим через R разбиение, которое порождает на T отображение f: $R = \{f^{-1}(\xi): \xi \in \in F_n(X)\}$. Покажем, что каждый элемент R лежит в некотором слое $\{z\}\times\{x_2\}\times\ldots\times\{x_{m-1}\}\times[V]^{n-m+1} = T_z$ произведения T $(z \in [U])$ и на всех слоях разбиение R одинаково.

Пусть z $(z_1, \ldots, z_n) \in T$. Покажем, что

$$\{z_1, \ldots, z_{m-1}\} \subset supp(f(z)) \subset \{z_1, \ldots, z_n\}. \qquad (1)$$

В самом деле, по определению отображения f, $f(z) = F(z)(\delta)$ (напомним, что под z в правой части равенства мы понимаем отображение z: $n \to \{z_1, \ldots, z_n\} \subset$ Z). Если z взаимно однозначно (то есть все координаты точки z различны), то $supp(f(z)) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, так как $supp(\delta) = n$. Если же среди координат z имеются совпадающие, то рассмотрим отображение q: $\{z_1, \ldots, z_n\} \to \{z_1, \ldots, z_m\}$, определяемое следующим образом: $q(z_i) = z_i$ при $i \le m$, $q(z_i) = z_m$ при $i > m$. Очевидно, что композиция $q \circ z$ гомеоморфна отображению φ_{nm}. Следовательно,

$$|supp(F(q \circ z)(\delta))| = |supp(F(\varphi_{nm})(\delta))| = m.$$

Значит, $supp(F(q \circ z)(\delta)) = \{z_1, \ldots, z_m\}$, откуда следует, что

$$supp(F(z)(\delta)) \supset \{z_1, \ldots, z_{m-1}\}.$$

Включение (1) доказано.

Пусть $z^i = \{z^i_1, \ldots, z^i_n\}$, $i = 1, 2$ – две точки из различных слоев T (то есть $z^1_1 \neq z^2_1$). Тогда в силу включения (1) $f(z^1) \neq f(z^2)$. Таким образом, элементы разбиения R не могут пересекать два различных слоя T_z одновременно.

Покажем теперь, что если $f(z_1, z^1_2, \ldots, z^1_n) = f(z_1, z^2_2, \ldots, z^2_n)$, $z_1 \in [U]$, то

$$f(z'_1, z^1_2, \ldots, z^1_n) = f(z'_1, z^2_2, \ldots, z^2_n)$$

для любого $z'_1 \in [U]$. Введем обозначения:

$$a^k = (z_1, z^k_2, \ldots, z^k_n),\ b^k = (z'_1, z^k_2, \ldots, z^k_n),$$

$$A^k = \{z_1, z^k_2, \ldots, z^k_n\},\ B^k = \{z'_1, z^k_2, \ldots, z^k_n\},\ k = 1, 2.$$

Пусть отображения q_k: $A^k \to B^k$ определяются по формуле: $q_k(z_1) = q_k(z'_1)$, $q_k(z^k_i) = z^k_i$, $k = 1, 2$. Тогда $b^k = q_k \circ a^k$, $k = 1, 2$ и $q_1|_{A^1 \cap A^2} = q_2|_{A^1 \cap A^2}$. Имеем

$$F(a^1)(\delta) = F(a^2)(\delta) \in F(A^1) \cap F(A^2) = F(A^1 \cap A^2).$$

Следовательно,

$$F(b^1)(\delta) = F(q_1|_{A_1 \cap A_2})(F(a^1)(\delta)) =$$
$$= F(q_2|_{A_1 \cap A^2})\,(F(a^2)(\delta)) = F(b^2)(\delta),$$

что и требовалось доказать.

Итак, разбиение R порождает на всех слоях T_z произведения T одинаковые разбиения R'. Слои T_z гомеоморфны $[V]^{n-m+1}$, следовательно, фактор-пространство $T/R = f(T) \subset F_n(X)$ гомеоморфно произведению $\Pi = [U] \times ([V]^{n-m+1}/R')$. В силу включения (1) $\Pi = f(T) \subset F_n(X)\backslash X$, следовательно, Π наследственно нормально. Наследственная нормальность Π по лемме Катетова (см. [6]) влечет совершенную нормальность $[V]^{n-m+1}/R'$ (по построению $[U]$ бесконечно).

Возьмем теперь произвольный слой T_z (он гомеоморфен $[V]^{n-m+1}$) и рассмотрим отображение

$$g = f|_{T_z} : [V]^{n-m+1} \to [V]^{n-m+1}/R' \subset F_n(X).$$

Пусть Δ_{n-m+1} – обобщенная диагональ $[V]^{n-m+1}$. Имеем $g^{-1}(g(\Delta_{n-m+1})) = \Delta_{n-m+1}$, поскольку при $x \in \Delta_{n-m+1} |supp(g(x))| = m$, а при $x \notin \Delta_{n-m+1} |supp(g(x))| = n$, (см. доказательство включения (1)). Следовательно, Δ_{n-m+1} – G_δ-множество в $[V]^{n-m+1}$. Значит, по предложению 1 $[V]$ метризуемо.

Итак, показано, что любая точка $x \in X$ имеет метризуемую окрестность. Следовательно, компакт X метризуем.

Остается рассмотреть случай, когда X имеет единственную неизолированную точку. Предположим, что X неметризуемо. Тогда X является александровской компактификацией несчетного дискретного пространства: $X = \{t\} \cup A$. Разложим A на три несчетных непересекающихся подмножества: $A = B \cup C \cup D$. Рассмотрим в $X^n\backslash\Delta_n$ подмножества

$$F_1 = \{(x_1, \ldots, x_n): x_1 \in B, x_2 = t, x_3 = x^0_3, \ldots, x_n = x^0_n\},$$

$$F_2 = \{(x_1, \ldots, x_n): x_1 = t, x_2 \in C, x_3 = x^0_3, \ldots, x_n = x^0_n\}.$$

Здесь $x^0_3, \ldots, x^0_n$ – фиксированные несовпадающие точки из D. Очевидно, что F_1, F_2 замкнуты в $X^n\backslash\Delta_n$ и не пересекаются. Нетрудно также показать, что F_1 и F_2 не имеют в X^n непересекающихся окрестностей. Положим

$$h = \pi_n|_{X^n \times \{\delta\}} : X^n \times \{\delta\} = X^n \to F_n(X).$$

Тогда $h^{-1}(h(\Delta_n)) = \Delta_n$. Отображение $h|_{X^n\backslash\Delta_n}$ замкнуто, и $h(F_1) \cap h(F_2) = \varnothing$. Поскольку $h(X^n\backslash\Delta_n) \subset F_n(X)\backslash X$ и $F_n(X)\backslash X$ наследственно нормально, множества $h(F_1)$ и $h(F_2)$ имеют в $h(X^n\backslash\Delta_n)$ непересекающиеся окрестности, прообразы которых будут непересекающимися окрестностями F_1 и F_2 в X^n. Противоречие.

Предложение 2. *Пусть F – полунормальный функтор и $sp(F) = \{1, m, \ldots\}$. Если для компакта X пространство $F_m(X)$ совершенно нормально, то X метризуем.*

Доказательство. Пусть δ – некоторая точка из $F_{mm}(m)$. Положим

$$f = \pi_m|_{X^m \times \{\delta\}} : X^m \times \{\delta\} = X^m \to F_m(X).$$

Тогда $f^{-1}(f(\Delta_m)) = \Delta_m$. Из совершенной нормальности $F_m(X)$ следует, что Δ_m – G_δ-множество в X^m. Поэтому, согласно предложению 1, X метризуем.

Теорема 2. (♦) *Существует неметризуемый совершенно нормальный компакт X такой, что для любого $n \in N$*

1) X^n наследственно сепарабельно;

2) $X^n\backslash\Delta_n$ совершенно нормально;

3) если F – замкнутое подмножество X^n и $[F\backslash\Delta_n] = F$, то F – G_δ-множество в X^n.

Доказательство. Покажем, что компакт X, построеный в работе [3] в результате топологизации спектра множеств $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta: \alpha, \beta \in \omega_1\}$, ассоциированного с деревом Ароншайна, является искомым. Приведем необходимые элементы построения X.

В [3] использовалась следующая формулировка принципа Йенсена. Пусть R – некоторое множество мощности c, α – порядковое число. Обозначим через ${}^\alpha R$ множество отображений из α в R. Любую последовательность вида

$$\langle s_\beta : \beta < \alpha\rangle,\ s_\beta \in {}^\alpha R$$

будем называть (R, α)-последовательностью. Для каждой (R, α)-последовательности $p = \langle s_\beta : \beta < \alpha \rangle$ и каждого ординала $\gamma < \alpha$ определено ограничение p на γ:

$$p\,|_\gamma = \langle s_\beta|_\gamma : \beta < \gamma \rangle.$$

Принцип Йенсена ♦ утверждает, что для каждого $\alpha < \omega_1$ можно выбрать (R, α)-последовательность g_α так, что для любой (R, ω_1)-последовательности x множество $\{\alpha : x|_\alpha = g_\alpha\}$ пересекается с любым замкнутым несчетным подмножеством $F \subset \omega_1$. При этом последовательность $\Gamma = \langle g_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ называется универсальной гиперпоследовательностью. В дальнейшем мы будем предполагать, что универсальная гиперпоследовательность Γ фиксирована.

Рассмотрим спектр

$$Q = \{{}^\alpha R, q^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\},$$

проекции которого определены по формуле: $q^\alpha_\beta(s) = s|_\beta$. В [3] для каждого $n \in N$ фиксированы вложения

$$\{f_{n\alpha} : \alpha \le \omega_1\} : S^n \to Q$$

спектров $S^n = \{X^n_\alpha, (\pi^\alpha_\beta)^n : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ в Q, так что $f_{n\alpha}(X^n_\alpha) \cap f_{m\alpha}(X^m_\alpha) = \varnothing$ при $m \ne n$, $\alpha \in \omega_1$. Тем самым точки каждого пространства X^n_α отождествляются с точками ${}^\alpha R$. Это позволяет говорить, что элемент g_α универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в X^n_α, если $g_\alpha \subset f_{n\alpha}(X^n_\alpha)$.

Согласно [3], подмножество $C \subset X^n$ находится в X^n в общем положении, если для любых двух точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C$ равенство $x_i = y_j$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = y$ и $i = j$ (все координаты всех точек различны). Описанный в [10] процесс топлогизации спектра S дает спектр из метризуемых компактов с вполне замкнутыми проекциями, предел которого $X = \lim S$ является неметризуемым совершенно нормальным компактом и все конечные степени X^n наследственно сепарабельны. При этом, если $C \subset X^n$, $\pi^n_\alpha(C) \supset g_\alpha$ (π^n_α – предельная проекция спектра S^n) и g_α лежит в X^n в общем положении, то для любой предельной точки x множества g_α имеет место включение $(\pi^n_\alpha)^{-1}x \subset [C]$.

Покажем, что компакт X удовлетворяет условию 3 нашей теоремы для любого $n \in N$. При $n = 1$ это очевидно в силу совершенной нормальности X. Предположим, что условие 3 выполняется для всех $k < n$, и пусть F – замкнутое подмножество X^n, $[F \backslash \Delta_n] = F$.

Подмножество X^n, состоящее из точек, некоторая координата которых фиксирована, будем называть *слоем* X^n. Положим: $A = \{x \in F$: для любой окрестности Ox множество $Ox \cap F$ не содержится в конечном объединении слоев $X^n\}$. Выберем в A счетное всюду плотное подмножество $B = \{x_n : n \in N\}$, и пусть $\{Ox^k_n : k \in N\}$ – счетная база окрестностей точек x_n. По индукции, путем последовательного перебора окрестностей Ox^k_n, $n, k \in N$ легко построить счетное подмножество $C = \{y_m : m \in N\} \subset F \backslash \Delta_n$, которое лежит в X^n в общем положении и пересекается с каждой окрестностью Ox^k_n, $n, k \in N$. Очевидно, что $[C] \supset [A]$. Существует $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что множество $C_{\alpha_0} = \pi^n_{\alpha_0} C$ лежит в $X^n_{\alpha_0}$ в общем положении, $C_{\alpha_0} = g_{\alpha_0}$ и отображение $\pi^n_{\alpha_0}$ взаимно однозначно в точках C (см. [3]). По отмеченному выше свойству спектра S для любой предельной точки x множества C_{α_0} имеем $(\pi^n_{\alpha_0})^{-1}x \subset [C]$. Следовательно, $[C] = (\pi^n_{\alpha_0})^{-1}\pi^n_{\alpha_0}([C])$.

Назовем слой $T \subset X^n$ F-слоем, если $[F \backslash T] \ne F$. Если T – F-слой, положим $U_T = X^n \backslash [F \backslash T]$. Поскольку F сепарабельно, F-слоев в X^n не более, чем счетное множество: $\{T_i : i \in N\}$. Положим $V_i = U_{T_i} \cap F$, $F_i = [V_i]$. Очевидно, $F_i \subset T_i = X^{n-1}$. Поскольку Δ_n нигде не плотно в F, а V_i открыто в F,

$$F_i = [V_i] = [V_i \backslash \Delta_n] = [F_i \backslash \Delta_n].$$

Следовательно, по предположению индукции множества F_i имеют тип G_δ в слоях T_i, а значит, и в X^n. Таким образом, для каждого i существует $\alpha_i < \omega_1$ такое, что $(\pi^n_{\alpha_i})^{-1}\pi^n_{\alpha_i}(F_i) = F_i$.

Докажем теперь, что

$$[C] \bigcup_i F_i = F. \tag{2}$$

Пусть $x \in F$ и $x \notin A$, то есть существует окрестность Ox в X^n такая, что $Ox \cap F$ лежит в конечном объединении слоев X^n. Пусть $T^1, \ldots, T^k$ – минимальный набор слоев X^n, объединение которых содержит $Ox \cap F$. Тогда каждый слой T^j является F-слоем, то есть $T^j = T_{i_j}$. Покажем, что $x \in \cup F_{i_j}$. Предположим противное. Пусть $O'x = Ox \setminus \cup F_{i_j}$. Имеем $\varnothing \ne O'x \cap F \subset \cup T^j$, и, следовательно, для некоторого T^j

$$O'x \cap F \not\subset [(O'x \cap F) \backslash T^j].$$

Но тогда $(O'x \cap F) \cap F_{i_j} \ne \varnothing$ – противоречие. Итак, равенство (2) доказано.

Пусть теперь $\beta > \alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ В силу (2) и выбора ординалов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ имеем

$$(\pi^n_\beta)^{-1}\pi^n_\beta(F) = F.$$

Следовательно, F имеет тип G_δ в X^n. Условие 3 доказано.

Из условия 3 сразу следует, что для любого n всякое замкнутое подмножество в $X^n \setminus \Delta_n$ имеет тип G_δ. Покажем, что $X^n \setminus \Delta_n$ нормально. Пусть $A_1, A_2 \subset X^n \backslash \Delta_n$ – замкнутые непересекающиеся множества. Положим $B_i = [A_i]_{X^n}$, $i = 1, 2$. Поскольку $[B_i \backslash \Delta_n] = B_i$ в силу условия 3 найдется $\alpha < \omega_1$ такое, что $(\pi^n_\alpha)^{-1}\pi^n_\alpha(B_i) = B_i$. Множества $\pi^n_\alpha B_1 \setminus \pi^n_\alpha B_2$ и $\pi^n_\alpha B_2 \setminus \pi^n_\alpha B_1$ имеют в X^n_α непересекающиеся окрестности U_1 и U_2. Положим $V_i = (\pi^n_\alpha)^{-1} U_i$. Тогда $A_i \subset V_i$. В самом деле, если $x \in A_1$ и $\pi^n_\alpha(x) \notin U_1$, то $\pi^n_\alpha(x) \in \pi^n_\alpha B_2$ и, следовательно, $x \in B_2$, что невозможно. Итак, V_1, V_2 – непересекающиеся окрестности A_1, A_2.

Предложение 3. *Компакт X из теоремы (2) имеет не наследственно нормальный квадрат.*

Доказательство. Пусть $F \subset X$ – неметризуемое замкнутое подмножество с пустой внутренностью (такое F существует – см. [3]). Положим $A_1 = \Delta \backslash F^2$, $A_2 = F^2 \backslash \Delta$. В силу выбора F $\Delta \subset [A_1]$. Покажем, что A_1 и A_2 не имеют в X^2 непересекающихся окрестностей. Предположим, что существуют открытые в X^2 множества $V_i \supset A_i$ такие, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Поскольку X не содержит изолированных точек (см. [3]), диагональ Δ нигде не плотна в X^2. Следовательно, $[[V_1]\backslash\Delta] = [V_1]$. Так как F^2 имеет тип G_δ в X^2 и выполнено условие 3 теоремы (2), найдется индекс $\alpha < \omega_1$ такой, что $[V_1] = (\pi^2_\alpha)^{-1}\pi^2_\alpha[V_1]$ и $(\pi^2_\alpha)^{-1}\pi^2_\alpha(F^2) = F^2$. По построению множества A_1 диагональ пространства X^2_α лежит в $\pi^2_\alpha[V_1]$. Поскольку F неметризуемо, в пересечении $\pi^2_\alpha\Delta \cap \pi^2_\alpha(F^2)$ найдется точка x, прообраз которой $(\pi^2_\alpha)^{-1}x$ нетривиален, и, значит, $(\pi^2_\alpha)^{-1}x \not\subset \Delta$. Пусть $y \in (\pi^2_\alpha)^{-1}x\backslash\Delta$. Тогда $y \in A_2$ и $y \in [V_1]$ – противоречие.

Теорема 3. (♦) *Существует неметризуемый совершенно нормальный компакт X такой, что для любого сохраняющего вес полунормального функтора F и для любого $n \in sp(F)$ $F_n(X)$ наследственно сепарабельно и $F_n(X)\backslash F_{n-1}(X)$ совершенно нормально.*

Доказательство. Пусть X – компакт из теоремы 2 и пусть $n \in sp(F)$. Пространство $(X^n\backslash\Delta_n) \times F(n)$ совершенно нормально, поскольку $F(n)$ метризуемо (см. [9]). Имеет место включение

$$\Pi_n(X) = \pi_n^{-1}(F_{nn}(X)) \subset (X^n\backslash\Delta_n) \times F(n),$$

значит, $\Pi_n(X)$ также совершенно нормально. В силу замкнутости отображения $\pi_n|_{\Pi_n(X)}$, отсюда следует, что $F_{nn}(X)$ также совершенно нормально. Наследственная сепарабельность $F_n(X)$ следует из наследственной сепарабельности $X^n \times F(n)$, поскольку произведение наследственно сепарабельного пространства на пространство со счетной базой наследственно сепарабельно.

Пример. Для каждого компакта Y определим $F(Y)$ как результат склейки пространств $exp_2 Y$ и $\lambda_3 Y$ по точкам компакта Y. Ясно, что конструкция F функториальна, то есть для любого непрерывного отображения $f{:}Y \to Z$ определено непрерывное отображение $F(f)$: $F(Y) \to F(Z)$ по формуле: $F(f)(\xi) = exp_2\,(f)(\xi)$ при $\xi \in exp_2 Y$ и $F(f)(\xi) = \lambda_3\,(f)(\xi)$ при $\xi \in \lambda_3 Y$. Нетрудо проверить, что функтор F удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, и $sp(F) = \{1, 2, 3\}$ (функтор F естественно назвать букетом функторов exp_2 и λ_3). Пусть X – компакт из теоремы 2. Тогда, поскольку

$$F(X)\backslash X = F_3(X)\backslash X = (exp_2 X\backslash X) \cup_d (\lambda_3 X \backslash X),$$

по теореме 3 пространство $F_3(X)\backslash X$ совершенно нормально.

Таким образом, условие (*) в фомулировке теоремы 1 существенно.

ПРИМЕЧАНИЕ

* Все необходимые определения, касающиеся функторов, приведены ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басманов В. Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. № 5. С. 1033–1036.
2. Жураев Т. Ф. Функтор λ и метризуемость бикомпактов // Вестник МГУ. Сер. 1. «Математика. Механика». 1999. № 4. С. 54–56.
3. Иванов А. В. О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // Доклады АН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1109–1112.
4. Иванов А. В. О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов // Труды Петрозаводского университета. Сер. «Математика». 2000. Вып. 7. С. 15–28.
5. Иванов А. В. О функторах конечной степени и κ-метризуемых бикомпактах // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 1. С. 60–68.
6. Федорчук В. В. К теореме Катетова о кубе // Вестник МГУ. Сер. 1. «Математика. Механика». 1989. № 4. С. 93–96.
7. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.
8. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 3–62.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 750 с.
10. Gruenhage G., Nyikos P. Normality in X^2 for compact X // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 340. № 2. P. 563–586.
11. Fedorchuc V., Todorčevic' S. Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. Vol. 76. P. 125–150.