Декабрь, № 8 **Технические науки** **2011**

УДК 518.61

АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ КРУПКО
аспирант кафедры технологии и оборудования лесного комплекса лесоинженерного факультета, Петрозаводский государственный университет
andreykrupko@yandex.ru

ЕВГЕНИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ БЕЛЫЙ
кандидат технических наук, доцент кафедры математического моделирования систем управления математического факультета, Петрозаводский государственный университет
belyi@psu.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ ЛЕСОТРАНСПОРТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В статье предлагается математическая модель управления производственными мощностями лесотранспортного предприятия с учетом сезонных факторов.

Ключевые слова: математическая модель, автопарк, производственная мощность

Функционирование лесотранспортных предприятий требует учета природно-производственных условий лесозаготовок, при которых в течение небольшого временного интервала нужны транспортные средства различных классов, в частности, при организации многоступенчатых перевозок, связанных с особенностями производственного процесса и качеством автомобильных дорог [3; 198]. Поэтому представляет интерес задача оптимального использования производственных мощностей и инвестиций как во временной развертке, так и в плане структуры автотранспортного предприятия.

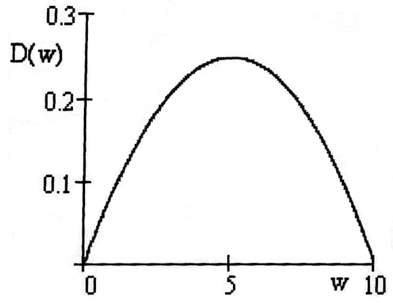
Допустим, что лесопромышленное предприятие имеет на балансе парк лесовозных автомобилей одного типа и периода эксплуатации. Перед руководством предприятия возникает проблема инвестирования денежных средств в парк лесовозных автомобилей, то есть вопрос о том, в какой период времени и в каких количествах необходимо вкладывать денежные средства для эффективной работы предприятия.

Для $t = 0, 1, \ldots, T$ положим D_t – прыбыль предприятия за период t; w_t – мощность парка машин в период времени t в денежном выражении; I_t – инвестиции в начале периода t, то есть приращение мощности парка, $I_\Sigma = \sum_{t=1}^{T} I_t$ – суммарные инвестиции за «большой период» T, $I = \varnothing$

Положим, что мощность парка w_t через один период в результате амортизации принимает значение $w_t \cdot \rho$, где $\rho < 1$ – коэффициент, постоянный для данного парка машин. Тогда с учетом инвестиций мощность парка в период $t + 1$ составит величину $w_{t+1} = w_t \cdot \rho + I_{t+1}$. Зависимость дохода предприятия в период t от его мощности зададим уравнением вида

$$D_t(w_t) = \alpha_t \cdot w_t - \beta \cdot w_t^2, \qquad (1)$$

где α_t и β – некоторые вещественные положительные коэффициенты. Причем первый из них зависит от периода t. Из (1) следует, что вначале с ростом мощности прибыль от основной хозяйственной деятельности растет, затем темпы роста снижаются. Наконец, при $w_t = \frac{\alpha_t}{2 \cdot \beta}$ прибыль достигнет максимального значения, и дальнейшее увеличение мощности приведет только к снижению прибыли (см. рисунок). Последнее связано с действием известного экономического закона убывающей доходности: по мере увеличения затрат одного типа при фиксированных всех остальных затратах в некоторый момент будет достигнута точка, за которой предельный результат производства будет уменьшаться [1; 140]. Следовательно, при фиксированных постоянных издержках прибыль с некоторых пор будет снижаться.



Зависимость дохода предприятия от производственной мощности

Как было замечено выше, α_t зависит от t. Таким образом, мы можем учесть в модели сезонный характер работ, когда эффективность производственных мощностей зависит от временного периода. Учитывая амортизацию и инвестиции I_t, проведем последовательность подстановок в формулах $w_{t+1} = w_t \cdot \rho + I_{t+1}$.

$$\begin{cases} w_1 = w_0 \cdot \rho + I_1 \\ w_2 = w_0 \cdot \rho^2 + I_1 \cdot \rho + I_2 \\ w_3 = w_0 \cdot \rho^3 + I_1 \cdot \rho^2 + I_2 \cdot \rho + I_3 \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ w_T = w_0 \cdot \rho^T + I_1 \cdot \rho^{T-1} + I_2 \cdot \rho^{T-2} + \quad \cdots \quad + I_T. \end{cases} \qquad (2)$$

То есть $w_t = w_0 \cdot \rho^t + \sum_{i=1}^{t} I_i \cdot \rho^{t-i}$. Теперь мы можем сформулировать задачу оптимального использования инвестиций в виде:

$$\sum_{t=0}^{T} D_t \to \max$$
$$\sum_{t=1}^{T} I_t = I_\Sigma.$$

Мы не будем предъявлять требование неотрицательности инвестиций, поскольку отрицательные инвестиции иногда можно трактовать как продажу мощностей или сдачу их в аренду. Найдем максимум функции

$$F(I_1, I_2, \cdots, I_T, \lambda) = \sum_{t=0}^{T} D_t - \lambda \cdot \left(\sum_{t=0}^{T} I_t - I_\Sigma \right), \qquad (3)$$

где

$$D_t = \alpha_t \cdot \left(w_0 \cdot \rho^t + \sum_{i=1}^{t} I_i \cdot \rho^{t-i} \right) - \beta \cdot \left(w_0 \cdot \rho^t + \sum_{i=1}^{t} I_i \cdot \rho^{t-i} \right)^2,$$

λ – множитель Лагранжа. Здесь мы учли условие $I_0 = 0$.

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial I_j} \equiv \sum_{t=0}^{T} \frac{\partial D_t}{\partial I_j} - \lambda = 0, \text{ где } j = 1, 2, \dots, T. \qquad (4)$$

$$\frac{\partial D_t}{\partial I_j} = \begin{cases} \alpha_t \cdot \rho^{t-j} - 2 \cdot \beta \cdot \left(w_0 \cdot \rho^{2\cdot t - j} + \sum_{i=1}^{t} I_i \cdot \rho^{2\cdot t - i - j} \right), & \text{если } j \le t. \\ 0, & \text{если } \ j > t. \end{cases}$$

Подставив значения частных производных прибыли в уравнение (4), после ряда преобразований получим систему уравнений

$$\sum_{t=j}^{T} \sum_{i=1}^{t} I_i \cdot \rho^{2\cdot t - i - j} = \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \sum_{t=j}^{T} \alpha_t \cdot \rho^{t-j} - w_0 \cdot \sum_{t=j}^{T} \rho^{2\cdot t - j} - \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \lambda$$

для $j = 1, 2, \dots, T$. Запишем систему в матричной форме.

$$R \cdot I = \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot A - w_o \cdot P - \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \lambda \cdot E. \qquad (5)$$

Здесь

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \cdot \rho^{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} \alpha_t \cdot \rho^{t-2} \\ \vdots \\ \alpha_T \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} \rho^{2\cdot t - 1} \\ \sum_{t=2}^{T} \rho^{2\cdot t - 2} \\ \vdots \\ \rho^T \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$R = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{T-1} \rho^{2\cdot j} & \rho \cdot \sum_{j=0}^{T-2} \rho^{2\cdot j} & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho \cdot \sum_{j=0}^{T-2} \rho^{2\cdot j} & \sum_{j=0}^{T-2} \rho^{2\cdot j} & \cdots & \rho^{T-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, элементы матрицы R определяются равенством

$$R_{j,t} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{T-t} \rho^{2\cdot i}, & \text{если } j = t \\ \rho^{t-j} \cdot \sum_{i=0}^{T-t} \rho^{2\cdot i}, & \text{если } j < t \\ \rho^{j-t} \cdot \sum_{i=0}^{T-j} \rho^{2\cdot i}, & \text{если } j > t \end{cases}.$$

Матрица R при любом значении T обладает следующими свойствами:

1. Определитель матрицы $|R| = 1$.
2. Обратная матрица

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, несмотря на довольно сложное описание матрицы R, ее обратная матрица имеет очень простой вид. Доказательство мы опустим, не желая чрезмерно увеличивать объем статьи. Заметим только, что оно ведется по индукции и опирается на свойства блочных матриц [2; 55–56].

Умножим левую и правую части уравнения (5) слева на R^{-1}:

$$I = \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot R^{-1} \cdot A - w_o \cdot R^{-1} \cdot P - \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \lambda \cdot R^{-1} \cdot E. \qquad (6)$$

Умножим матрицу R^{-1} на векторы A, P и E:

$$R^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 - \rho \cdot \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_T - \rho \cdot \alpha_{T-1} \end{pmatrix}, \quad R^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } R^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} 1-\rho \\ (1-\rho)^2 \\ \dots \\ (1-\rho)^2 \\ 1-\rho+\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Просуммировав члены уравнения (6) по строкам, получим:

$$\begin{cases} I_1 = -w_0 \cdot \rho + \frac{\alpha_1}{2 \cdot \beta} + \frac{(1-\rho)}{2 \cdot \beta} \cdot (-\lambda) \\ I_2 = \frac{\alpha_2 - \rho \cdot \alpha_1}{2 \cdot \beta} + \frac{(1-\rho)^2}{2 \cdot \beta} \cdot (-\lambda) \\ \quad \dots \\ I_{T-1} = \frac{\alpha_{T-1} - \rho \cdot \alpha_{T-2}}{2 \cdot \beta} + \frac{(1-\rho)^2}{2 \cdot \beta} \cdot (-\lambda) \\ I_T = \frac{\alpha_T - \rho \cdot \alpha_{T-1}}{2 \cdot \beta} + \frac{(1-\rho+\rho^2)}{2 \cdot \beta} \cdot (-\lambda) \end{cases}. \qquad (7)$$

Таким образом, мы нашли значения инвестиций в периоды $t = 1, 2, \ldots, T$, выраженные через λ. Теперь просуммируем соответственно левые и правые части равенств (7).

$$\sum_{t=1}^{T} I_t = I_\Sigma = -w_0 \cdot \rho + \frac{(1-\rho)\cdot \sum_{t=1}^{T-1} \alpha_t + \alpha_T}{2\cdot\beta} - \frac{(T-1)\cdot(1-\rho)^2+1}{2\cdot\beta}\cdot\lambda \cdot \quad (8)$$

Отсюда

$$-\lambda = \frac{2\cdot\beta\cdot(I_\Sigma + w_0\cdot\rho) - (1-\rho)\cdot\sum_{t=1}^{T-1}\alpha_t + \alpha_T}{(T-1)\cdot(1-\rho)^2+1}.$$

Теперь, подставив значение $-\lambda$ в (7), мы можем найти оптимальные значения инвестиций I_t.

Пример. Пусть количество периодов $T = 10$, исходная мощность в денежном выражении $w_0 = 5$, коэффициент в уравнении (1) $\beta = 0{,}01$, $\rho = 0{,}95$, $I_\Sigma = 50$. Значения коэффициента α_t для различных периодов времени приведены ниже в таблице. Также в таблице приведены соответствующие расчетные значения инвестиций, производственных мощностей и дохода.

Пример расчета инвестиций за 10 периодов времени

1	2	3	4	5	6
Период t	α_t	ρ^t	Инвестиции I_t	Мощность w_t	Доход D_t
1	0,2	0,950	4,944	9,694	0,999
2	0,2	0,903	0,485	9,694	0,999
3	0,2	0,857	0,485	9,694	0,999
4	0,4	0,815	10,485	19,694	3,999
5	0,5	0,774	5,985	24,694	6,249
6	0,5	0,735	1,235	24,694	6,249
7	0,7	0,698	11,235	34,694	12,249
8	0,8	0,663	6,735	33,694	15,999
9	0,9	0,630	6,985	44,694	20,249
10	1,0	0,599	1,428	43,888	24,626

Рассмотрим следующую задачу, в которой автомобильный парк делится на M классов лесовозных автомобилей. В каждом классе представлены машины одного типа и времени эксплуатации.

Аналогично (4) найдем

$$\frac{\partial F}{\partial I_{m,j}} \equiv \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=0}^{T}\frac{\partial D_{m,t}}{\partial I_{m,j}} - \lambda = 0, \text{ где } j = 1, 2, \ldots, T.$$

Далее, повторив все выкладки предыдущего пункта отдельно для каждого класса машин, получим систему уравнений, в которой значения $I_{m,t}$ аналогично (7) выражены через множитель Лагранжа λ. Просуммируем соответственно левые и правые части (7). Тогда

$$I_\Sigma = -\sum_{m=1}^{M} G_m + \sum_{m=1}^{M} H_m \cdot \lambda, \quad (9)$$

где

$$G_m = w_{m,0}\cdot\rho_m - \frac{(1-\rho_m)\cdot\sum_{t=1}^{T-1}\alpha_{m,t} + \alpha_{m,T}}{2\cdot\beta_m},$$

$$H_m = -\frac{(T-1)\cdot(1-\rho_m)^2+1}{2\cdot\beta_m}.$$

Отсюда $\lambda = \dfrac{I_\Sigma + \sum_{m=1}^{M} G_m}{\sum_{m=1}^{M} H_m}$.

Подставив λ в уравнения (7), получим систему уравнений, определяющих величины инвестиций для всех классов машин $m = 1, 2, \ldots, M$ за все рассматриваемые периоды времени $t = 1, 2, \ldots, T$.

$$\begin{cases} I_{m,1} = -w_{m,0}\cdot\rho_m + \dfrac{\alpha_{m,1} - (1-\rho_m)\cdot\lambda}{2\cdot\beta_m} \\ I_{m,2} = \dfrac{\alpha_{m,2} - \rho_m\cdot\alpha_{m,1} - (1-\rho_m)^2\cdot\lambda}{2\cdot\beta_m} \\ \ldots \\ I_{m,T} = \dfrac{\alpha_{m,T} - \rho_m\cdot\alpha_{m,T-1} - \left(1-\rho_m+\rho_m^{\;2}\right)\cdot\lambda}{2\cdot\beta_m} \end{cases}. \quad (10)$$

В приведенном выше примере все оптимальные значения инвестиций положительны. Однако при других исходных данных могут получаться и отрицательные значения $I_{m,t}$. Если под $I_{m,t} > 0$ понимать любые привлечения мощностей в основную производственную деятельность предприятия, а под $I_{m,t} < 0$ – любой способ их изъятия, то такое решение может быть вполне адекватно исследуемому процессу.

Разумеется, адекватность модели зависит не только от самой модели, но и от цели и объекта исследования. Мы допустили ряд упрощений, которые позволили получить выражения $I_{m,t}$ в общем виде. Такое представление результата позволяет проводить дальнейшие исследования аналитическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долан Эдвин Дж. Микроэкономика: Пер с англ. СПб.: Санкт-Петербург оркестр, 1994. 448 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
3. Шегельман И. Р., Скрыпник В. И., Кузнецов А. В., Пладов А. В. Вывозка леса автопоездами. Техника. Технология. Организация. СПб.: Профикс, 2008. 304 с.