

ГЕННАДИЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛЕСНИКОВ

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механики, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
 kolesnikovgn@yandex.ru

ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КУВШИНОВ

аспирант кафедры механики, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
 dak@ptz.ru

АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМИ КОНТАКТАМИ

Исследуется математическая модель механической системы с полуконтактными (односторонними) контактами. Модель получена как физически обоснованное описание контактного взаимодействия подсистем механической системы. Исследуется эффективность алгоритма компьютерной реализации модели.

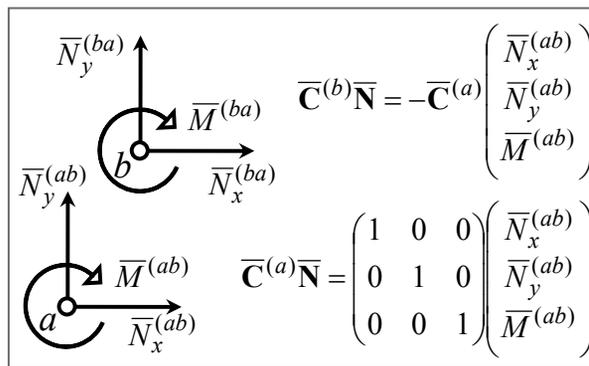
Ключевые слова: метод декомпозиции, метод конечных элементов, контактное взаимодействие

Развитие методов декомпозиции обусловлено необходимостью решения поставляемых практикой все более сложных задач, требующих компьютерного моделирования инженерных объектов и технологических процессов. Цель разработки метода декомпозиции – корректно заменить решение одной большой задачи решением серии меньших задач и тем самым уменьшить затраты времени как в последовательных, так и в параллельных алгоритмах численного моделирования. Применение методов декомпозиции позволяет расширить класс объектов, моделирование которых может быть выполнено с применением существующей компьютерной техники. Появление многопроцессорных вычислительных систем и мультиядерных процессоров стимулировало эволюцию методов декомпозиции. Развитие методов декомпозиции привело к формированию одного из фундаментальных направлений вычислительной математики. К актуальным проблемам данного направления относится совершенствование алгоритмов численного моделирования с применением метода конечных элементов [6], [7]. В данной статье в развитие работы [3] рассматривается алгоритм декомпозиции конечно-элементной модели механической системы с полуконтактными (односторонними) контактами*. Примером такой модели может быть система «контактная сеть – токоприемники электроподвижного состава» [1], [4]. Объектом исследования является математическая модель механической системы с полуконтактными (односторонними) контактами. Модель получена как физически обоснованное описание контактного взаимодействия подсистем механической системы. Предмет изучения – вычислительная эффективность алгоритма компьютерной реализации модели.

Пусть конечно-элементная модель разбита на n подструктур. Запишем в векторно-матричной форме уравнения движения каждой подструктуры $k, k = 1, \dots, n$.

$$\mathbf{M}^{(k)} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \dot{\mathbf{U}}^{(k)} + \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{P}^{(k)} + \overline{\mathbf{C}}^{(k)} \overline{\mathbf{N}}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}^{(k)}, \dot{\mathbf{U}}^{(k)}$ и $\ddot{\mathbf{U}}^{(k)}$ – векторы (одномерные массивы) соответственно перемещений, скоростей и ускорений узлов; $\mathbf{R}^{(k)}, \mathbf{K}^{(k)}$ и $\mathbf{M}^{(k)}$ – матрицы соответственно жесткости, демпфирования и масс. $\mathbf{P}^{(k)}$ – вектор внешних воздействий (внешних сил). Соотношение (1), которое можно интерпретировать как систему уравнений равновесия, отличается от общепринятой формулировки слагаемым $\overline{\mathbf{C}}^{(k)} \overline{\mathbf{N}}$, где $\overline{\mathbf{C}}^{(k)}$ – матрица коэффициентов в уравнениях равновесия. Элементами вектора $\overline{\mathbf{N}}$ являются силы и моменты (пары сил), появляющиеся при контактном взаимодействии подсистем (см. рисунок). $\overline{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{U}^{(k)}$ заранее не известны, их определение – цель решения задачи.



Узлы a и b двух подсистем

Если, например, $\overline{N}_x^{(ab)} = 0$ и $\overline{M}^{(ab)} = 0$, то $\overline{\mathbf{C}}^{(a)} \overline{\mathbf{N}} = 1 \cdot \overline{N}_y^{(ab)}$, $\overline{\mathbf{C}}^{(b)} \overline{\mathbf{N}} = -1 \cdot \overline{N}_y^{(ab)}$. Это модель скользящего вдоль оси x шарнирно-подвижного контакта.

Зазоры укажем в векторе $\bar{\mathbf{D}}$, определив их линейными и угловыми компонентами. Например, для двух контактирующих узлов a и b получим:

$$\bar{\mathbf{D}}^{(ab)} = \bar{\mathbf{C}}^{(a)T} \mathbf{U}^{(a)} + \bar{\mathbf{C}}^{(b)T} \mathbf{U}^{(b)} + \bar{\mathbf{D}}_0^{(ab)}. \quad (2)$$

Не указывая верхние индексы, запишем дискретный аналог уравнения (1), используя явную схему с односторонними конечными разностями. С учетом (2) при $\bar{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{0}$ получим [2]:

$$\mathbf{A} \mathbf{U}_i = \hat{\mathbf{P}}_i + \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{N}}; \quad \bar{\mathbf{D}}_i = \mathbf{C}^T \mathbf{U}_i, \quad (3)$$

где: $\mathbf{A} = \mathbf{M} \tau^{-2} + \mathbf{K} \tau^{-1} + \mathbf{R}$,

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i + \tau^{-2} \mathbf{M} \mathbf{U}_{i-2} + (2\mathbf{M} \tau^{-2} + \mathbf{K} \tau^{-1}) \mathbf{U}_{i-1},$$

τ – шаг по времени, i – номер шага.

Для подструктуры k на шаге i получим (индекс i не указан):

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{U}^{(k)} - \bar{\mathbf{C}}^{(k)} \bar{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{P}}^{(k)}; \quad \bar{\mathbf{D}}^{(k)} = \bar{\mathbf{C}}^{(k)T} \mathbf{U}^{(k)}.$$

Систему этих соотношений для всех $k = 1, \dots, n$ запишем в виде блочного векторно-матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{C}}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{C}}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{(n)} & -\bar{\mathbf{C}}^{(n)} \\ -\bar{\mathbf{C}}^{(1)T} & -\bar{\mathbf{C}}^{(2)T} & \dots & -\bar{\mathbf{C}}^{(n)T} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \\ \dots \\ \mathbf{U}^{(n)} \\ \bar{\mathbf{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{P}}^{(2)} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{P}}^{(n)} \\ -\bar{\mathbf{D}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из (4) следует:

$$\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1(k)} (\hat{\mathbf{P}}^{(k)} + \bar{\mathbf{C}}^{(k)} \bar{\mathbf{N}}). \quad (5)$$

Используя (5) и учитывая, что, согласно (4),

$$\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{U} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{C}}^{(k)T} \mathbf{U}^{(k)} = \bar{\mathbf{D}},$$

получим:

$$\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{C}}^{T(k)} \mathbf{A}^{-1(k)} (\hat{\mathbf{P}}^{(k)} + \bar{\mathbf{C}}^{(k)} \bar{\mathbf{N}}) = \bar{\mathbf{D}}.$$

Если односторонних связей нет, то $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$. Тогда [3]

$$\bar{\mathbf{N}} = - \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{C}}^{T(k)} \mathbf{A}^{-1(k)} \bar{\mathbf{C}}^{(k)} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{C}}^{T(k)} \mathbf{A}^{-1(k)} \hat{\mathbf{P}}^{(k)}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), определим $\mathbf{U}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. Таким образом, задача определения векторов $\bar{\mathbf{N}}$ и \mathbf{U} при $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ решена. Если связи односторонние, то $\bar{\mathbf{D}} \neq \mathbf{0}$ и определение векторов $\bar{\mathbf{N}}$ и \mathbf{U} сводится к линейной задаче дополненности:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{C}}^{T(k)} \mathbf{A}^{-1(k)} \bar{\mathbf{C}}^{(k)} \bar{\mathbf{N}} + \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{C}}^{T(k)} \mathbf{A}^{-1(k)} \hat{\mathbf{P}}^{(k)}, \\ \bar{\mathbf{N}} &\geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{D}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{D}} = 0. \end{aligned}$$

Решив эту задачу, например, с применением энергетического критерия перехода односторонних связей в действительное состояние [5], найдем $\bar{\mathbf{N}}$ и $\bar{\mathbf{D}}$. Затем определим $\mathbf{U}^{(k)}$ (5), $k = 1, \dots, n$.

Тестирование алгоритма при $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ выполнено на компьютере с процессором Intel® Core™2 Duo CPU E8400@3.00 GHz, кэш L1 32 Kb, L2 6144 Kb, память DDR3 667 MHz 2 Gb, Intel P43, ОС Windows XP 32 bit. Модель механической системы [4] разбивалась на n подсистем с примерно одинаковым числом неизвестных. Затраты времени (в секундах) при решении задачи с общим числом уравнений N_0 и числом подструктур n приведены в таблице.

N_0	n						
	1	2	3	4	5	6	7
1000	0,36	0,26	0,15	0,11	0,10	0,09	0,09
2000	2,21	1,98	0,81	0,57	0,41	0,34	0,29
3000	6,52	9,08	3,14	1,51	1,11	0,91	0,72

При $N_0 > 1$ выполнялась только декомпозиция, алгоритм вычислений – последовательный. Алгоритм параллельных вычислений обеспечит дальнейшее уменьшение времени счета.

Таким образом, применение представленного метода декомпозиции в задачах определенного класса [2], [4] позволяет уменьшить затраты времени при численном моделировании.

ПРИМЕЧАНИЕ

* В данной статье исправлены опечатки, допущенные в [3] по технической причине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вологин В. А., Герасимов А. С. Динамические параметры системы контактная сеть – токоприемник // Вестник ВНИИЖТ. 2008. № 2. С. 19–23.
2. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Численное моделирование полуконтактного механического взаимодействия токоприемника и контактной сети при высокой скорости электровоза // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2008. № 3 (94). С. 83–88.
3. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Декомпозиция конечно-элементной модели // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2012. № 2 (123). С. 78–79.
4. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Численное моделирование динамического взаимодействия токоприемников и контактной сети // Вестник ВНИИЖТ. 2012. № 1. С. 9–12.
5. Колесников Г. Н., Раковская М. И. Энергетический критерий очередности перехода односторонних связей в действительное состояние // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. С. 652.
6. Копысов С. П., Новиков А. К. Метод декомпозиции для параллельного адаптивного конечно-элементного алгоритма // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 141–154.
7. Филалко С. Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. М.: Изд-во СКАДСОФТ: Изд-во Ассоциации строительных вузов (АСВ), 2000. 160 с.