

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ

кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
metalll@bk.ru

О РАСЧЕТЕ НА ИЗГИБ НЕУПРУГИХ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИНОК*

Рассмотрены неупругие многослойные составные пластинки, включающие в себя отдельные слои, соединенные между собой структурными связями. Используются основные положения теории упругих составных пластинок А. Р. Ржаницына. Получено решение задачи расчета на изгиб пластинки, имеющей переменную толщину слоев и переменную жесткость связей сдвига, разную в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Получены выражения для определения эквивалентных модулей продольных деформаций в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Ключевые слова: неупругая составная пластинка, переменная жесткость связей сдвига, эквивалентные модули продольных деформаций

Исследуется поведение под нагрузкой упруго-пластических многослойных пластинок, имеющих слои переменной толщины, которые соединены между собой абсолютно жесткими поперечными связями и податливыми связями продольного сдвига, обладающими переменной жесткостью на сдвиг в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для материала слоев пластинки и ее связей устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжением. Используется гипотеза о нелинейно-упругом материале, основанная на теореме, доказанной Л. М. Качановым [2], согласно которой при активной пластической деформации поведение упругопластического тела неотличимо от поведения нелинейно-упругого тела.

Исследование базируется на использовании основных положений теории расчета многослойных пластинок, разработанной А. Р. Ржаницыным [3]. В этой теории рассмотрены составные пластинки с упругими слоями постоянной толщины, соединенные между собой абсолютно жесткими поперечными связями и упругими продольными связями сдвига постоянной жесткости. В данной работе система дифференциальных уравнений изгиба упругих составных пластинок, полученная А. Р. Ржаницыным, заменена системой уравнений в конечных разностях, в которой учтена переменная толщина слоев, переменная жесткость продольных связей сдвига и нелинейная работа материала, как слоев, так и связей составной пластинки. Каждый k -й слой пластинки рассматривается как ортотропная пластинка. На срединную плоскость каждого слоя пластинки наложена ортогональная сетка, образованная семейством прямых линий: $x = j \cdot s_x$, $y = m \cdot s_y$, где j и m – порядковый номер прямых линий, расположенных перпендикулярно соответственно координатным осям x и y ; s_x и s_y – шаг прямых линий, образующих

сетку, соответственно в направлениях осей x и y . Расстояние между срединными плоскостями слоев – $c_{jm}^{(\kappa)}$. Используется метод шагового нагружения конструкции [1].

Дифференциальное уравнение изгиба неупругой пластинки, состоящей из $(n + 1)$ слоев в конечно-разностной форме для узла jm , расположенного на пересечении прямых линий, образующих сетку, с номерами j и m , на i -м шаге нагружения равномерно распределенной нагрузкой $q^{(i)}$ примет вид

$$\frac{\Delta_x^4 w_{jm}^{(i)}}{s_x^4} \sum_{\kappa=1}^{n+1} D_{xjm}^{equ(\kappa,i)} + 2 \frac{\Delta_x^2 (\Delta_y^2 w_{jm}^{(i)})}{s_x^2 s_y^2} \sum_{\kappa=1}^{n+1} D_{xyjm}^{equ(\kappa,i)} + \frac{\Delta_y^4 w_{jm}^{(i)}}{s_y^4} \sum_{\kappa=1}^{n+1} D_{yjm}^{equ(\kappa,i)} = q^{(i)} + \sum_{\kappa=1}^{n+1} c_{jm}^{(\kappa)} \left(\frac{\Delta_x \tau_{xjm}^{(\kappa,i)}}{s_x} + \frac{\Delta_y \tau_{yjm}^{(\kappa,i)}}{s_y} \right), \quad (1)$$

где $w_{jm}^{(i)}$ – перемещение узла jm в направлении оси z ; $D_{xjm}^{equ(\kappa,i)}$ и $D_{yjm}^{equ(\kappa,i)}$ – эквивалентные цилиндрические жесткости k -го слоя пластинки в узле jm соответственно в плоскостях, параллельных плоскостям xz и yz , для расчета на i -м шаге нагружения

$$D_{xjm}^{equ(\kappa,i)} = \frac{E_{xjm}^{equ(\kappa,i)} h_{jm}^{3(\kappa)}}{12(1 + \nu_{xjm}^{equ(\kappa,i)} \nu_{yjm}^{equ(\kappa,i)})}, \quad D_{yjm}^{equ(\kappa,i)} = \frac{E_{yjm}^{equ(\kappa,i)} h_{jm}^{3(\kappa)}}{12(1 + \nu_{xjm}^{equ(\kappa,i)} \nu_{yjm}^{equ(\kappa,i)})}, \quad (2)$$

здесь $E_{xjm}^{equ(\kappa,i)}$, $E_{yjm}^{equ(\kappa,i)}$ и $\nu_{xjm}^{equ(\kappa,i)}$, $\nu_{yjm}^{equ(\kappa,i)}$ – эквивалентные модули деформаций и эквивалентные коэффициенты Пуассона в двух взаимно перпендикулярных плоскостях; $h_{jm}^{(\kappa)}$ – толщина k -го слоя составной пластинки; $D_{xyjm}^{equ(\kappa,i)}$ – эквивалентная жесткость k -го слоя составной пластинки при кручении; $\tau_{xjm}^{(\kappa,i)}$ и $\tau_{yjm}^{(\kappa,i)}$ – погонные сдвигающие усилия в k -м шве в узле jm ; $\Delta_x^4 w_{jm}^{(i)}$, $\Delta_y^4 w_{jm}^{(i)}$ и $\Delta_x^2 (\Delta_y^2 w_{jm}^{(i)})$ – центральные конечные разности четвертого порядка для функции $w_{jm}^{(i)}$ в узле jm .

Вышеперечисленные эквивалентные параметры определяются по результатам расчета на $(i - 1)$ -м шаге нагружения. Погонные изгибающие моменты в k -м слое пластинки $M_{xjm}^{(\kappa, i-1)}$ и $M_{yjm}^{(\kappa, i-1)}$, действующие соответственно в плоскостях xz и yz , проходящих через узел jm , на $(i - 1)$ -м шаге нагружения определяются по формулам

$$M_{xjm}^{(\kappa, i-1)} = -D_{xjm}^{equ(\kappa, i-1)} \left(\frac{\Delta_x^2 w_{jm}^{(i-1)}}{s_x^2} + \nu_{xjm}^{equ(\kappa, i-1)} \frac{\Delta_y^2 w_{jm}^{(i-1)}}{s_y^2} \right), \quad (3)$$

$$M_{yjm}^{(\kappa, i-1)} = -D_{yjm}^{equ(\kappa, i-1)} \left(\frac{\Delta_y^2 w_{jm}^{(i-1)}}{s_y^2} + \nu_{yjm}^{equ(\kappa, i-1)} \frac{\Delta_x^2 w_{jm}^{(i-1)}}{s_x^2} \right). \quad (4)$$

Зная $M_{xjm}^{(\kappa, i-1)}$, $M_{yjm}^{(\kappa, i-1)}$ и осевые силы $N_{xjm}^{(\kappa, i-1)}$, $N_{yjm}^{(\kappa, i-1)}$, можно определить краевые относительные линейные деформации $\varepsilon_{xjm1}^{(\kappa, i-1)}$, $\varepsilon_{xjm2}^{(\kappa, i-1)}$ и $\varepsilon_{yjm1}^{(\kappa, i-1)}$, $\varepsilon_{yjm2}^{(\kappa, i-1)}$, возникающие в плоскостях, параллельных плоскостям xz и yz и проходящих через узел сетки jm . При этом используется метод Р. С. Санжаровского [6]. Слой k пластинки делится по толщине $h_{jm}^{(\kappa)}$ на $\bar{n}$ (в общем случае неравных) участков. Нормальные напряжения в k -м волокне на границе между этими смежными участками будут равны

$$\sigma_{xjmk}^{(\kappa, i-1)} = E_{xjmk}^{(\kappa, i-1)} \varepsilon_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad \sigma_{yjmk}^{(\kappa, i-1)} = E_{yjmk}^{(\kappa, i-1)} \varepsilon_{yjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad (5)$$

где $E_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}$, $E_{yjmk}^{(\kappa, i-1)}$ и $\varepsilon_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}$, $\varepsilon_{yjmk}^{(\kappa, i-1)}$ – модули продольных деформаций и относительные линейные деформации для k -го волокна k -го слоя пластинки.

С учетом (5) можно представить следующие равенства:

$$M_{xjm}^{(\kappa, i-1)} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} A_{xjmk}^{(\kappa, i-1)} \sigma_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad M_{yjm}^{(\kappa, i-1)} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} C_{yjmk}^{(\kappa, i-1)} \sigma_{yjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad (6)$$

$$N_{xjm}^{(\kappa, i-1)} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} B_{xjmk}^{(\kappa, i-1)} \sigma_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad N_{yjm}^{(\kappa, i-1)} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} F_{yjmk}^{(\kappa, i-1)} \sigma_{yjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad (7)$$

где $A_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}$, $B_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}$, $C_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}$, $F_{xjmk}^{(\kappa, i-1)}$ – интерполяционные коэффициенты.

Принимая во внимание справедливость гипотезы прямых нормалей, из (6) и (7) определяются $\varepsilon_{xjm1}^{(\kappa, i-1)}$, $\varepsilon_{xjm2}^{(\kappa, i-1)}$ и $\varepsilon_{yjm1}^{(\kappa, i-1)}$, $\varepsilon_{yjm2}^{(\kappa, i-1)}$. Кривизна срединной поверхности в узле jm в направлениях плоскостей xz и yz с учетом влияния поперечной силы будет равна [4], [5]

$$\chi_{xjm}^{(i-1)} = -\Delta \varepsilon_{xjm12}^{(\kappa, i-1)} / h_{jm}^{(\kappa)} + \gamma_{1xjm}^{(\kappa, i-1)} \frac{\Delta_x Q_{xjm}^{(\kappa, i-1)}}{s_x}, \quad (8)$$

$$\chi_{yjm}^{(i-1)} = -\Delta \varepsilon_{yjm12}^{(\kappa, i-1)} / h_{jm}^{(\kappa)} + \gamma_{1yjm}^{(\kappa, i-1)} \frac{\Delta_y Q_{yjm}^{(\kappa, i-1)}}{s_y}, \quad (9)$$

где $\Delta \varepsilon_{xjm12}^{(\kappa, i-1)} = \varepsilon_{xjm1}^{(\kappa, i-1)} - \varepsilon_{xjm2}^{(\kappa, i-1)}$, $\Delta \varepsilon_{yjm12}^{(\kappa, i-1)} = \varepsilon_{yjm1}^{(\kappa, i-1)} - \varepsilon_{yjm2}^{(\kappa, i-1)}$, $\gamma_{1xjm}^{(\kappa, i-1)}$ – углы сдвига материала слоев составной пластинки от поперечных сил соответственно $Q_{xjm}^{(\kappa, i-1)} = I$ и $Q_{yjm}^{(\kappa, i-1)} = I$.

Приравняв кривизну упругопластического слоя составной пластинки кривизне упругого слоя, получаем выражения для определения эк-

вивалентных цилиндрических жесткостей k -го слоя составной пластинки для расчета на i -м шаге нагружения:

$$D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} = -M_{xjm}^{(\kappa, i-1)} / \chi_{xjm}^{(i-1)}, \quad D_{yjm}^{equ(\kappa, i)} = -M_{yjm}^{(\kappa, i-1)} / \chi_{yjm}^{(i-1)}. \quad (10)$$

Эквивалентные параметры $\nu_{xyjm}^{equ(\kappa, i)}$ и $\nu_{yxjm}^{equ(\kappa, i)}$ связаны с $E_{xjm}^{equ(\kappa, i)}$ и $E_{yjm}^{equ(\kappa, i)}$ известными зависимостями

$$\nu_{xyjm}^{equ(\kappa, i)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu_o^{(\kappa)} \right) \frac{E_{xjm}^{equ(\kappa, i)}}{E_o^{(\kappa)}}, \quad \nu_{yxjm}^{equ(\kappa, i)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu_o^{(\kappa)} \right) \frac{E_{yjm}^{equ(\kappa, i)}}{E_o^{(\kappa)}}. \quad (11)$$

С учетом (2), (10) и (11) параметры $E_{xjm}^{equ(\kappa, i)}$ и $E_{yjm}^{equ(\kappa, i)}$ определяются из выражений

$$E_{xjm}^{equ(\kappa, i)} = 3(D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} + D_{yjm}^{equ(\kappa, i)})\alpha_1 - E_o^{(\kappa)} h_{jm}^3 - E_o^{(\kappa)} \sqrt{\Psi_{xjm}^{(\kappa, i)}} / 3D_{yjm}^{equ(\kappa, i)} \alpha_2, \quad (12)$$

$$\Psi_{xjm}^{(\kappa, i)} = 6(E_o^{(\kappa)} D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} + D_{yjm}^{equ(\kappa, i)})\alpha_1 - \{9[(D_{xjm}^{equ(\kappa, i)})^2 + (D_{yjm}^{equ(\kappa, i)})^2] + 126D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} D_{yjm}^{equ(\kappa, i)}\}\alpha_2 - h_{jm}^3 E_o^{(\kappa)2}, \quad (13)$$

$$E_{yjm}^{equ(\kappa, i)} = 3(D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} + D_{yjm}^{equ(\kappa, i)})\alpha_1 - E_o^{(\kappa)} h_{jm}^3 - E_o^{(\kappa)} \sqrt{\Psi_{yjm}^{(\kappa, i)}} / 3D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} \alpha_2, \quad (14)$$

$$\Psi_{yjm}^{(\kappa, i)} = 6(E_o^{(\kappa)} D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} + D_{yjm}^{equ(\kappa, i)})\alpha_1 - \{9[(D_{xjm}^{equ(\kappa, i)})^2 + (D_{yjm}^{equ(\kappa, i)})^2] + 126D_{xjm}^{equ(\kappa, i)} D_{yjm}^{equ(\kappa, i)}\}\alpha_2 - h_{jm}^3 E_o^{(\kappa)2}, \quad (15)$$

$$\alpha_1 = (1 - 2\nu_o^{(\kappa)}), \quad \alpha_2 = (1 - 4\nu_o^{(\kappa)} + 4\nu_o^{(\kappa)2}), \quad (16)$$

где $E_o^{(\kappa)}$ и $\nu_o^{(\kappa)}$ – модуль продольных деформаций и коэффициент Пуассона, соответствующие начальной точке диаграмма материала k -го слоя.

По результатам расчета на $(i - 1)$ -м шаге нагружения погонный крутящий момент определяется по формуле

$$M_{xyjm}^{(\kappa, i-1)} = -D_{xyjm}^{equ(\kappa, i-1)} \frac{\Delta_x (\Delta_y w_{jm}^{(i-1)})}{s_x s_y}. \quad (17)$$

Зная $M_{xyjm}^{(\kappa, i-1)}$, определяем краевые угловые деформации $\gamma_{xyjm1}^{(\kappa, i-1)}$ и $\gamma_{xyjm2}^{(\kappa, i-1)}$ из решения системы уравнений

$$M_{xyjm}^{(\kappa, i-1)} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} U_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)} \tau_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} L_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)} \tau_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)} = 0, \quad (19)$$

где $\tau_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)}$ – касательное напряжение кручения в k -м волокне на границе между смежными участками разбиения по толщине пластины, равное

$$\tau_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)} = \gamma_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)} G_{jmk}^{(\kappa, i-1)}, \quad (20)$$

здесь $G_{jmk}^{(\kappa, i-1)}$ – модуль сдвига, соответствующий $\gamma_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)}$ на диаграмме «касательные напряжения – угловые деформации»; $U_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)}$ и $L_{xyjmk}^{(\kappa, i-1)}$ – интерполяционные коэффициенты.

Эквивалентная жесткость при кручении для расчета на i -м шаге нагружения будет равна

$$D_{xyjm}^{(i)} = -M_{xyjm}^{(i-1)} / \chi_{xyjm}^{(i-1)}, \chi_{xyjm}^{(i-1)} = (\gamma_{xyjm1}^{(i-1)} - \gamma_{xyjm2}^{(i-1)}) / h_{jm}^{(i)}, \quad (21)$$

где $\chi_{xyjm}^{(i-1)}$ – кривизна пластинки при кручении.

Зависимости для определения погонных сдвигающих усилий в k -м шве $\tau_{xjm}^{(i)}$ и $\tau_{yjm}^{(i)}$ устанавливаются на основе дифференциальных уравнений, полученных А. Р. Ржаницыным [3]. Продифференцированные уравнения разности продольных смещений по обе стороны плоскости k -го шва [3] в конечно-разностной форме с учетом разных жесткостей связей шва на продольный сдвиг $\xi_{xjm}^{(i)}$ и $\xi_{yjm}^{(i)}$ в направлениях, параллельных плоскостям xz и yz , примут вид

$$\frac{1}{\xi_{xjm}^{(i)}} \cdot \frac{\Delta_x \tau_{xjm}^{(i)}}{s_x} = c_{jm}^{(i)} \frac{\Delta_x^2 w_{jm}^{(i)}}{s_x^2} + \frac{1}{E_{xjmo}^{(i)}} [\delta(\sigma_{xjmo}^{(i)}) - \nu_{xjmo}^{(i)} \delta(\sigma_{yjmo}^{(i)})],$$

$$\frac{1}{\xi_{yjm}^{(i)}} \cdot \frac{\Delta_y \tau_{yjm}^{(i)}}{s_y} = c_{jm}^{(i)} \frac{\Delta_y^2 w_{jm}^{(i)}}{s_y^2} + \frac{1}{E_{yjmo}^{(i)}} [\delta(\sigma_{yjmo}^{(i)}) - \nu_{yjmo}^{(i)} \delta(\sigma_{xjmo}^{(i)})], \quad (22)$$

$$\frac{1}{\xi_{xjmo}^{(i)}} \cdot \frac{\Delta_x \tau_{xjm}^{(i)}}{s_x} + \frac{1}{\xi_{yjmo}^{(i)}} \cdot \frac{\Delta_y \tau_{yjm}^{(i)}}{s_y} = 2c_{jm}^{(i)} \frac{\Delta_x (\Delta_y w_{jm}^{(i)})}{s_x s_y} + G_{xyjm}^{(i)} \delta(\tau_{xyjmo}^{(i)}),$$

где $\Delta_x \tau_{xjm}^{(i)}$, $\Delta_y \tau_{yjm}^{(i)}$, $\Delta_x \tau_{xjmo}^{(i)}$ и $\Delta_y \tau_{yjmo}^{(i)}$ – центральные конечные разности первого порядка для функций $\tau_{xjm}^{(i)}$ и $\tau_{yjm}^{(i)}$ в узле jmo ; $\delta(\sigma_{xjmo}^{(i)}) = \sigma_{xjmo}^{(i)} - \sigma_{xjmo}^{(i-1)}$, $\delta(\sigma_{yjmo}^{(i)}) = \sigma_{yjmo}^{(i)} - \sigma_{yjmo}^{(i-1)}$, $\delta(\tau_{xyjmo}^{(i)}) = \tau_{xyjmo}^{(i)} - \tau_{xyjmo}^{(i-1)}$ – разность осевых напряжений k -го слоя в узле jmo ; $G_{xyjm}^{(i)}$ – модуль сдвига в плоскости xy .

С учетом (22) система уравнений равновесия осевых сил для $(n + 1)$ слоев пластинки примет вид

$$\begin{aligned} & \left[\xi_{xjmo}^{(i)} E_{xjmo}^{(i)} \frac{\Delta_x^2 \tau_{xjm}^{(i)}}{s_x^2} + \xi_{xjm}^{(i)} E_{xjmo}^{(i)} \nu_{xjmo}^{(i)} \frac{\Delta_x (\Delta_y \tau_{yjm}^{(i)})}{s_x s_y} - \right. \\ & \left. - \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} c_{jm}^{(i)} \left(E_{xjmo}^{(i)} \frac{\Delta_x^3 w_{jm}^{(i)}}{s_x^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \nu_{xjmo}^{(i)} E_{yjmo}^{(i)} \frac{\Delta_y^3 w_{jm}^{(i)}}{s_y^3} \right) \right] / \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} (1 - \nu_{xjmo}^{(i)} \nu_{yjmo}^{(i)}) - \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left(\xi_{yjm}^{(i)} \frac{\Delta_y^2 \tau_{xjm}^{(i)}}{s_y^2} - \xi_{xjm}^{(i)} \frac{\Delta_x (\Delta_y \tau_{yjm}^{(i)})}{s_x s_y} - \right. \\ & \left. - 2 \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} c_{jm}^{(i)} \frac{\Delta_x (\Delta_y w_{jm}^{(i)})}{s_x s_y^2} \right) / \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} G_{xyjmo}^{(i)} + \\ & + \frac{\tau_{xjm}^{(i+1)}}{h_{jm}^{(i+1)}} - \left(\frac{1}{h_{jm}^{(i+1)}} + \frac{1}{h_{jm}^{(i)}} \right) \tau_{xjm}^{(i)} + \frac{\tau_{yjm}^{(i+1)}}{h_{jm}^{(i+1)}} = 0, \\ & \left[\xi_{xjmo}^{(i)} E_{xjmo}^{(i)} \frac{\Delta_x^2 \tau_{xjm}^{(i)}}{s_x^2} + \xi_{yjm}^{(i)} E_{xjmo}^{(i)} \nu_{xjmo}^{(i)} \frac{\Delta_x (\Delta_y \tau_{yjm}^{(i)})}{s_x s_y} - \right. \\ & \left. - \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} c_{jm}^{(i)} \left(\nu_{xjmo}^{(i)} E_{xjmo}^{(i)} \frac{\Delta_x^3 w_{jm}^{(i)}}{s_x^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - E_{yjmo}^{(i)} \frac{\Delta_y^3 w_{jm}^{(i)}}{s_y^3} \right) \right] / \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} (1 - \nu_{xjmo}^{(i)} \nu_{yjmo}^{(i)}) - \quad (24) \\ & - \left(\xi_{xjm}^{(i)} \frac{\Delta_x^2 \tau_{yjm}^{(i)}}{s_x^2} + \xi_{yjm}^{(i)} \frac{\Delta_y (\Delta_x \tau_{xjm}^{(i)})}{s_x s_y} - \right. \\ & \left. - 2 \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} c_{jm}^{(i)} \frac{\Delta_y (\Delta_x w_{jm}^{(i)})}{s_x s_y^2} \right) / \xi_{xjm}^{(i)} \xi_{yjm}^{(i)} G_{xyjmo}^{(i)} + \\ & + \frac{\tau_{yjm}^{(i+1)}}{h_{jm}^{(i+1)}} - \left(\frac{1}{h_{jm}^{(i+1)}} + \frac{1}{h_{jm}^{(i)}} \right) \tau_{yjm}^{(i)} + \frac{\tau_{xjm}^{(i+1)}}{h_{jm}^{(i+1)}} = 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_x^2 \tau_{xjm}^{(i)}$, $\Delta_y^2 \tau_{yjm}^{(i)}$, $\Delta_x^2 \tau_{xjmo}^{(i)}$, $\Delta_y^2 \tau_{yjmo}^{(i)}$, $\Delta_x (\Delta_y \tau_{xjm}^{(i)})$ и $\Delta_y (\Delta_x \tau_{yjm}^{(i)})$ – центральные конечные разности второго порядка для функций $\tau_{xjm}^{(i)}$ и $\tau_{yjm}^{(i)}$ в узле jmo ; $E_{xjmo}^{(i)}$, $E_{yjmo}^{(i)}$, $\nu_{xjmo}^{(i)}$, $\nu_{yjmo}^{(i)}$, $G_{xyjmo}^{(i)}$ – соответственно модули продольной упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для осевых волокон k -го слоя в узле jmo .

Совместное решение (1), (23) и (24) с учетом граничных условий позволяет решить задачу определения напряженно-деформированного состояния при изгибе многослойной составной пластинки за пределами упругости.

* Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития (ПСР) ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 61–73.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 314 с.
4. Рочев А. А. Исследование несущей способности сквозных упругопластических статически неопределимых рам переменного сечения // Труды молодых ученых: В 3 ч. Ч. 1. СПб.: СПбГАСУ, 2000. С. 187–192.
5. Рочев А. А. Алгоритм расчета арочной конструкции из составных упругопластических элементов // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2008. № 3 (94). С. 13–15.
6. Санжаровский Р. С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 280 с.