УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Сентябрь, № 6 Физико-математические науки 2012

УДК 517.977

АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КИРИЛЛОВ
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований, Карельский научный центр РАН, профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
kirillov@krc.karelia.ru

НИКОЛАЙ ВАСИЛЬЕВИЧ СМИРНОВ
аспирант Института прикладных математических исследований, Карельский научный центр РАН, преподаватель кафедры теории вероятностей и анализа данных математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
smirnov_work@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАЛОГО ПРЕДПРИЯТИЯ И ОПТИМАЛЬНАЯ СХЕМА КРЕДИТОВАНИЯ*

Строится математическая модель динамики развития малого предприятия с учетом штрафов за загрязнение окружающей среды. Рассматривается задача выбора оптимальной по прибыли схемы кредитования.

Ключевые слова: динамика развития, кредитование, фонды, управление

ВВЕДЕНИЕ

Современная Россия характеризуется наличием предпосылок для экономического роста. Как известно, на рынке существуют спрос и предложение на товары и услуги. В ситуации, когда спрос больше предложения, нужна быстрая организация или модернизация производства. В большинстве случаев кредиты – единственная возможность получения средств на эти цели. Как известно, в РФ приняты следующие схемы кредитования [2]:

- с равномерным погашением кредита;
- с «кредитными каникулами»;
- «воздушный шар».

В первой схеме долг, состоящий из предоставленного кредита и процентов по нему, выплачивается равномерно одинаковыми частями в течение всего периода кредитования. Во второй схеме долг выплачивается частями после некоторого промежутка времени, называемого «кредитные каникулы». В третьей весь долг погашается одной выплатой в конце периода кредитования.

Для совместного описания схем кредитования введем параметры Θ_1, Θ_2 – моменты окончания получения кредитов и окончания «кредитных каникул» соответственно. Тогда получаем задачу оптимального управления:

$$\dot{A} = F(A, \Theta_1, \Theta_2, t),$$

$$\max_{\Theta_2} I(A, \Theta_1, \Theta_2),$$

где $A(t)$ – стоимость производственных фондов, I – прибыль. В работе будут конкретизированы F и I.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В связи с разнообразием предложений возникает задача выбора оптимальной в смысле максимизации прибыли схемы кредитования. В работе рассмотрены аннуитетные платежи по кредиту. Перечисленные выше схемы отличаются моментом начала выплат. Введем функцию кредитования, объединяющую все схемы, что позволяет свести задачу выбора оптимальной по прибыли схемы к выбору момента окончания кредитных каникул.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Для построения модели рассмотрим схему «кредитные каникулы» и применим подход, предложенный в [1]. Затраты в начале проектов, как правило, наиболее капиталоемкие. Рассмотрим линейную убывающую во времени функцию кредитования $K(t) = \frac{2\overline{K}}{\Theta_1}(1 - \frac{t}{\Theta_1})$ [1], в которой общий объем кредитных займов $\overline{K}$ берется в период времени $(0, \Theta_1]$. Обычно можно заранее рассчитать Θ_1. В период $(\Theta_1, \Theta_2]$ предприятие развивается также без выплат по кредиту. Тогда $(0, \Theta_2]$ – период «кредитных каникул». С момента окончания кредитных каникул начинаются кредитные выплаты. По кредиту начисляются сложные проценты по ставке r за период начисления. Тогда к моменту Θ_2 кредитная задолженность $D = \frac{2\overline{K}}{r^2\Theta_1^2}(e^{r\Theta_1}(r\Theta_1 - 1) + 1)(1 + r(\Theta_2 - \Theta_1))$.

Введем следующие обозначения: A_0 – начальная стоимость предприятия; $\overline{K}$ – весь объем кредитных займов; T – длительность периода кредитования; f – коэффициент фондоотдачи; μ – коэффициент износа; коэффициент λ определяет количество полученных инвестиций в отношении к суммарному объему кредитов; коэффициент $0 \le \varepsilon \le 1$ определяет долю прибыли, вкладываемой в производство; все затраты на производство и штрафы за загрязнение окружающей среды включены в себестоимость единицы продукта γ; p – прибыль с каждой единицы продукта; $\delta(\Theta_2)$ – аннуитетный платеж.

Изменение стоимости фондов $A(t)$ отражает система:

$$\dot{A}(t)=\begin{cases} A(t)f\varepsilon(p-\gamma)+(1+\lambda)K(t)-\mu A(t) \ \ при \ \ t\in(0,\Theta_1], \\ A(t)f\varepsilon(p-\gamma)-\mu A(t) \ \ при \ \ t\in(\Theta_1,\Theta_2], \\ \varepsilon(fA(t)(p-\gamma)-\delta(\Theta_2))-\mu A(t) \ \ при \ \ t\in(\Theta_2,T], \end{cases} \quad (1)$$

где $\delta(\Theta_2)=D(r+\dfrac{r}{(1+r)^{T-\Theta_2}-1})$ – аннуитетный платеж.

Решая уравнения системы (1), получим выражения стоимости фондов в любой момент времени $t \in [0, T]$ [3]:

$$A(t)=\begin{cases} e^{\beta t}A_0+\dfrac{2\bar{K}(1+\lambda)}{\Theta_1}(\dfrac{e^{\beta t}-1}{\beta}+\dfrac{t}{\Theta_1\beta}+\dfrac{1-e^{\beta t}}{\Theta_1\beta^2}) \ при \ t\in(0,\Theta_1], \\ e^{\beta t}A_0+\dfrac{2\bar{K}(1+\lambda)}{\Theta_1}(\dfrac{e^{\beta t}}{\beta}+\dfrac{e^{\beta(t-\Theta_1)}-e^{\beta t}}{\Theta_1\beta^2}) \ при \ t\in(\Theta_1,\Theta_2], \\ e^{\beta t}A_0+\dfrac{2\bar{K}(1+\lambda)}{\Theta_1}(\dfrac{e^{\beta t}}{\beta}+\dfrac{e^{\beta(t-\Theta_1)}-e^{\beta t}}{\Theta_1\beta^2})+\dfrac{\varepsilon\delta(\Theta_2)}{\beta}(1-e^{\beta(t-\Theta_2)}) \ при \ t\in(\Theta_2,T], \end{cases}$$

где $\beta = \varepsilon f(p - \gamma) - \mu$.

Выразим из (1)

$$A(t)=\begin{cases} A_1(t)=\dfrac{\dot{A}-(1+\lambda)K(t)}{\varepsilon f(p-\gamma)-\mu} \ \ при \ \ t\in(0,\Theta_1], \\ A_2(t)=\dfrac{\dot{A}}{\varepsilon f(p-\gamma)-\mu} \ \ при \ t\in(\Theta_1,\Theta_2], \\ A_3(t)=\dfrac{\dot{A}+\delta(\Theta)\varepsilon}{\varepsilon f(p-\gamma)-\mu} \ \ при \ \ t\in(\Theta_2,T]. \end{cases} \quad (2)$$

Общая прибыль малого предприятия задается функционалом:

$$I=\int_0^{\Theta_1}(1-\varepsilon)fA_1(t)(p-\gamma)dt+\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}(1-\varepsilon)fA_2(t)(p-\gamma)dt+ \\ +\int_{\Theta_2}^{T}(1-\varepsilon)fA_3(t)(p-\gamma)dt-\delta(\Theta_2)(T-\Theta_2). \quad (3)$$

Подставив в (3) найденные из (2) A_1, A_2, A_3 и введя $\alpha=\dfrac{f(p-\gamma)(1-\varepsilon)}{\varepsilon\ f(p-\gamma)-\mu}$, получим функционал для нахождения прибыли за период кредитования:

$$I=\alpha\Bigg(A_o(e^{\beta T}-1)+\frac{2\bar{K}(1+\lambda)e^{\beta T}(\Theta_1\beta-1+e^{-\beta\Theta_1})}{\Theta_1^2\beta^2}+ \\ +\varepsilon\delta(\Theta_2)(\frac{1-e^{\beta(T-\Theta_2)}}{\beta}+T-\Theta_2)-(1+\lambda)\bar{K}\Bigg)-\delta(\Theta_2)(T-\Theta_2).$$

В схеме «воздушный шар» $\Theta_2 = T$, тогда выплата всей задолженности по кредиту $D=\dfrac{2\bar{K}}{r^2\Theta_1^2}(e^{r\Theta_1}(r\Theta_1-1)+1)(1+r(T-\Theta_1))$ производится по окончании периода кредитования. Стоимость фондов вычисляется как

$$A(t)=\begin{cases} A_1(t) \ \ при \ t\in(0,\Theta_1], \\ A_2(t) \ \ при \ t\in(\Theta_1,T]. \end{cases}$$

Для схемы равномерного погашения кредита $\Theta_2 = 0$. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени берется один кредит K_0 и сразу начинаются выплаты по нему в размере $\delta(0)$. При условии, что до момента Θ_1 происходит модернизация производства, стоимость фондов вычисляется

$$A(t)=\begin{cases} A_1(t)-\delta(0) \ \ при \ t\in(0,\Theta_1], \\ A_2(t)-\delta(0) \ \ при \ t\in(\Theta_1,T]. \end{cases}$$

Для этих двух схем в формулу общей прибыли (3) вносятся соответствующие изменения.

При вычислениях важно учитывать, что:

- все параметры предоставляются в расчете на период начисления процентов по кредиту;
- при расчетах важно проверять ограничение, что стоимость фондов в конце периода кредитования не менее некоторого, подходящего нам значения $A(T) \ge \sigma_T = const$. Это условие влияет на выбор параметра ε, который следует увеличить, если условие не выполняется.

Поскольку функционал I сложен для аналитического исследования, перейдем к численному анализу.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим значения параметров, которые соответствуют типичному малому предприятию, выпускающему некоторую продукцию: хлебобулочные изделия, молочные продукты и т. д. (табл. 1). Для увеличения производства берутся кредиты. Табл. 2 показывает зависимость общей прибыли от значений параметров.

Особый интерес вызывает момент, с которого наиболее выгодно начинать выплаты по кредиту. Численный анализ данной задачи показывает зависимость общей прибыли от момента Θ_2 при различных значениях остальных параметров.

Таблица 1

Параметры задачи

Параметр	Стандартное значение	Параметр	Стандартное значение
A_0, руб.	10^6	Θ_1, мес.	6
f	0,068	Θ_2, мес.	9
ε	0,1	r %, в мес.	0,02
μ	0,0084	p	20
$\bar{K}$, руб.	10^6	λ	0
T, мес.	12	λ	0

Рис. 1–2 отражают влияние выбора момента начала выплат Θ_2 на прибыль при различных значениях процентной ставки кредита. По графикам видно, что при низкой процентной ставке выгоднее делать кредитные выплаты в конце периода кредитования (рис. 1). При большой

ставке лучше начинать делать выплаты сразу по окончании процесса модернизации предприятия (рис. 2).

Таблица 2

Результаты варьирования некоторых параметров

Параметр	Стандартное значение	Интервал варьирования	Общая прибыль за период кредитования
$\overline{K}$, руб.	10^6	$0{,}5*10^6$ – $2*10^6$	$2{,}773*10^6$ – $3{,}821*10^6$
Θ_2, мес.	9	7–11	$3{,}0962*10^6$ – $3{,}0974*10^6$
r% , в мес.	0,02	0,01–0,05	$3{,}2*10^6$ – $2{,}73*10^6$
ε	0,1	0,1–0,9	$3{,}096*10^6$ – $1{,}77*10^5$
f	0,068	0,04–0,09	$1{,}21*10^6$ – $4{,}71*10^6$
μ	0,0084	0,04–0,1	$2{,}4*10^6$ – $1{,}45*10^6$

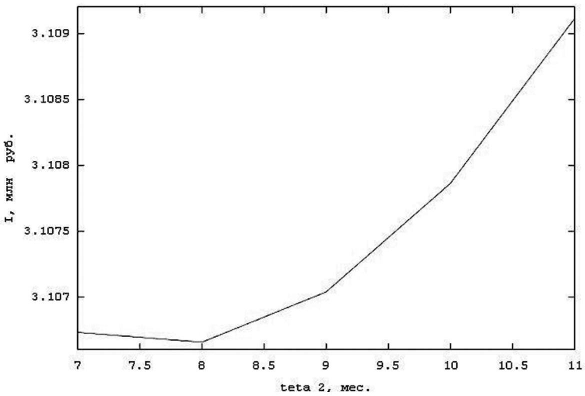

Рис. 1. $r = 0{,}019$

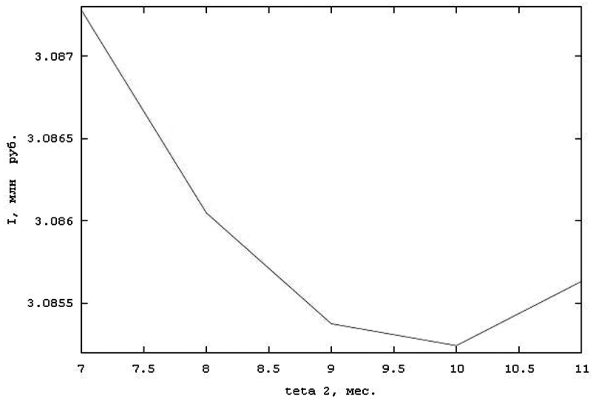

Рис. 2. $r = 0{,}021$

ВЫВОДЫ

Построенная модель динамики фондов дает возможность выбрать оптимальную в смысле максимизации прибыли схему кредитования и определить оптимальный момент окончания «кредитных каникул». Получены выражения для общей прибыли и стоимости фондов в любой момент времени, что позволяет оперативно корректировать значения параметров, определяющих развитие предприятия. Представлены результаты численного моделирования.

Имеется возможность дальнейшего развития этой модели с целью нахождения такой штрафной функции, которая позволила бы решить задачу экономического развития предприятия при ограничениях на допустимые загрязнения окружающей среды. Это дало бы подход к решению проблемы сочетания экономических и социальных интересов региона.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егорова Н. Е., Хачатрян С. Р. Применение дифференциальных уравнений для анализа динамики развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционные ресурсы // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42. № 1. С. 50–67.
2. Качалов Р. М., Клейнер Г. Б., Тамбовцев В. Л. Предприятие в нестабильной экономической среде: риски, стратегии, безопасность. М.: Экономика, 1997. 288 с.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1967. 564 с.