Декабрь, № 8. Т. 1 **Физико-математические науки** **2012**

УДК 517.9

ЕВГЕНИЙ ВИКТОРОВИЧ БЫЧКОВ
аспирант кафедры уравнений математической физики механико-математического факультета, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация)
bychkov42@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Целью статьи является численное исследование задачи Шоуолтера – Сидорова для вырожденного уравнения Буссинеска – Лява, а также численное исследование задачи Коши для невырожденного уравнения Буссинеска – Лява в одномерном случае. В работе используются метод фазового пространства и метод Галеркина.

Ключевые слова: задача Шоуолтера – Сидорова, уравнение соболевского типа, фазовое пространство, метод Галеркина

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω ограниченная область в R^n , $n \in N$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\overline{R}_+$ рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda-\Delta)\ddot{u}=\alpha(\Delta-\lambda')\dot{u}+\beta(\Delta-\lambda'')u+\Delta f(u) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{R}_+ \qquad (2)$$

и условиями Коши

$$u(x,0)=u_0(x), \quad \dot{u}(x,0)=u_1(x) \qquad (3)$$

или условиями Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda-\Delta)(u(x,0)-u_0(x))=0, \quad (\lambda-\Delta)(\dot{u}(x,0)-u_1(x))=0, \qquad (4)$$

где α, β, λ, λ', $\lambda'' \in R$, $f(u)$ – функция класса C^∞, $u(x,t)$ – искомая функция, она может иметь различный физический смысл в зависимости от задачи. Уравнение (1) является более общим случаем уравнения

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=mc_0^2\tau\frac{\partial^3\rho}{\partial t^2\partial x}-mc_0^2\frac{\partial^4\rho}{\partial t^2\partial x^2}, \qquad (5)$$

где ρ – плотность, c_0 – скорость звука, τ – время релаксации, первый член в правой части отвечает за затухание звуковой волны вследствие теплопроводности и вязкости, а второй регулирует дисперсионные эффекты [5]. Уравнение (5) описывает распространение гравитационно-гироскопических волн в диспергирующих средах, например поверхностно-акустические волны. Обозначим через $\sigma(\Delta)=\{\lambda_k\}$ множество собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω. При λ, не принадлежащем $\sigma(\Delta)$, задача (1), (2), (3) хорошо исследована и доказаны теоремы о существовании единственного решения, например [4]. В противном случае задача (1), (2), (3) является принципиально неразрешимой при произвольных начальных значениях $u_0(x)$, $u_1(x)$, она была исследована в [6] с помощью метода фазового пространства. Задача (1), (2), (4) сводится в подходящим образом выбранных банаховых пространствах к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(0)-u_0)=0, \quad P(\dot{u}(0)-u_1)=0, \qquad (6)$$

где p – некоторый спектральный проектор, а задача (1), (2), (3) – к задаче Коши

$$u(0)=u_0, \quad \dot{u}(0)=u_1 \qquad (7)$$

для уравнения соболевского типа

$$A\ddot{u}=B_1\dot{u}+B_0u+N(u). \qquad (8)$$

Стоит заметить, что задача Шоуолтера – Сидорова является частным случаем начально-конечной задачи [1], [3]. Целью работы является исследование существования решения и численное решение задачи (1), (3), (4) при произвольных начальных значениях $u_0(x)$, $u_1(x)$, а также численное исследование задачи (1), (2), (4), при λ, не принадлежащем $\sigma(\Delta)$, методом Галеркина.

ЗАДАЧА ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

Задачу (1), (2), (4) сведем к абстрактной задаче (6), (8), для этого зададим пространства

$$U=\{u(x)\in W_2^{l+2}(\Omega) \mid u(x,t)=0,\ u(x,t)\in\partial\Omega\times\mathrm{R}\}$$

$$F=W_2^{l}(\Omega).$$

Тогда операторы A, B_1, B_0 имеют следующий вид: $A=(\lambda-\Delta)$, $B_1=\alpha(\Delta-\lambda')$, $B_0=\beta(\Delta-\lambda'')$ и принадлежат пространству $L(U,F)$ (линейных и ограниченных операторов). Оператор, определенный формулой $N(u)=\Delta f(u)$ при $l>n/2-2$, принадлежит классу C^∞ [4]. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ множество соответствующих им собственных функций, ортонормированных в смысле скалярного произведения пространства $L_2(\Omega)$. Построим проектор $P(\bullet)=I-\sum\limits_{\lambda=\lambda_k}<\bullet,\varphi_k>\varphi_k$, действующий в пространстве U, и проектор Q, имеющий тот же вид, но определенный в пространстве F. Обозначим через U^0 и F^0 соответственно ker P

и ker Q. Тогда условия Шоуолтера – Сидорова (4) можно переписать в виде

$$I-\sum_{\lambda=\lambda_k}<u(0)-u_0,\varphi_k>\varphi_k=0\,,\; I-\sum_{\lambda=\lambda_k}<\dot{u}(0)-u_1,\varphi_k>\varphi_k=0.$$

Редукция задачи (1), (2), (4) к задаче (6), (8) окончена.

В [2] доказано, что если λ не принадлежит $\sigma(\Delta)$ или $\lambda = \lambda' \neq \lambda''$, тогда пучок операторов B_1 и B_0 является полиномиально A-ограниченным, ∞ является устранимой особой точкой и выполнены все условия теоремы о существовании единственного локального решения абстрактной задачи (7), (8) [6].

Заметим, что в случае задачи Шоуолтера – Сидорова начальные условия задаются как проекции на образ оператора при старшей производной, который в случае, когда ∞ – устранимая особая точка A-резольвенты пучка $\vec{B}$, совпадает с образом проектора P. Таким образом, начальные значения задачи Шоуолтера – Сидорова автоматически попадают в фазовое пространство заданного уравнения, в отличие от начальных значений в задаче Коши.

Следовательно, для задачи (1), (2), (4) справедлива

Теорема 1. Пусть $l > n/2 - 2$, $\lambda = \lambda' \neq \lambda''$ или λ не принадлежит $\sigma(\Delta)$ *и отображение* $(I-Q)(B_0+N'_{u_0}):U^0\to F^0$ *является топлинейным изоморфизмом. Тогда для любых u_0, $u_1 \in U$ существует единственное решение задачи (1), (2), (4) (задачи (1), (2), (3)).*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

На основе теоретических результатов был разработан и реализован алгоритм численного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения Буссинеска – Лява (1) в среде Maple 15.0. Разработанная программа позволяет:

1. Ввести коэффициенты α, β, λ, λ', λ'', функцию $f(u)$, начальные данные $u_0(x)$, $u_1(x)$ и длину отрезка.
2. Вывести приближенное решение задачи Шоуолтера – Сидорова (Коши) для уравнения (1) с условиями Дирихле.
3. Получить графическое изображение полученного приближенного решения.
4. Построить фазовое пространство уравнения (1).

Решение задачи (1), (2), (4) будем искать в виде галеркинской суммы

$$\tilde{u}(x,t)=\sum_{n=1}^{3}u_k(t)\varphi_k(x), \qquad (9)$$

где $\varphi_k(x)$ – собственные функции оператора Лапласа.

Пример 1. Требуется найти численное решение задачи (1), (2), (3) при $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$, $\alpha = \beta = 1$, $f(u) = u^3$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u_0 = \sin(x) - \sin(2x) + 3\sin(3x)$, $u_1 = 5\sin(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. В полосе $[0, \pi]\times R_+$ рассмотрим задачу

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \qquad (10)$$

$$u(x,0)=\sin(x)-\sin(2x)+3\sin(3x)\,,\; \dot{u}(x,0)=5\sin(x), \qquad (11)$$

$$-\Delta\ddot{u}=\Delta\dot{u}+\Delta u+\Delta(u^3). \qquad (12)$$

Собственные функции φ_k однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа на отрезке $[0, \pi]$ имеют вид $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$. Очевидно, уравнение (12) является невырожденным. В этом случае фазовым пространством является пространство U. В силу (9) решение имеет вид

$$\tilde{u}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(u_1(t)\sin(x)+u_2(t)\sin(2x)+u_3(t)\sin(3x)).$$

Подставив $\tilde{u}(x,t)$ в уравнение (12) и умножив скалярно в смысле $L_2([0, \pi])$ полученное равенство на функции φ_k, k = 1, 2, 3, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений (13) для нахождения $u_k(t)$.

$$\begin{cases} 5,01326\left(\frac{d^2}{dt^2}u_2(t)\right)=-5,01326\left(\frac{d}{dt}u_2(t)\right)-5,01326u_2(t)-4,78732u_1(t)u_2(t)u_3(t)-\\ \quad -4,78732u_2(t)(u_3(t))^2-4,78732(u_1(t))^2u_2(t)-2,39366(u_2(t))^3,\\ 1,25331\left(\frac{d^2}{dt^2}u_1(t)\right)=-1,25331\left(\frac{d}{dt}u_1(t)\right)+0,598414(u_1(t))^2u_3(t)-0,598414u_3(t)-\\ \quad -1,25331u_1(t)-1,19683u_1(t)(u_3(t))^2-0,598414(u_2(t))^2u_3(t)-1,19683u_1(t)(u_2(t))^2\\ 11,2798\left(\frac{d^2}{dt^2}u_3(t)\right)=-11,2798\left(\frac{d}{dt}u_3(t)\right)+1,79524(u_1(t))^3-10,7715u_3(t)(u_1(t))^2-\\ \quad -10,7715(u_2(t))^2u_3(t)-5,38573u_1(t)(u_2(t))^2-11,2798u_3(t)-5,38573(u_3(t))^3. \end{cases} \qquad (13)$$

На рис. 1 изображен график приближенного решения задачи (10)–(12) с шагами $\Delta x = 0,003$ и $\Delta t = 0,2$.

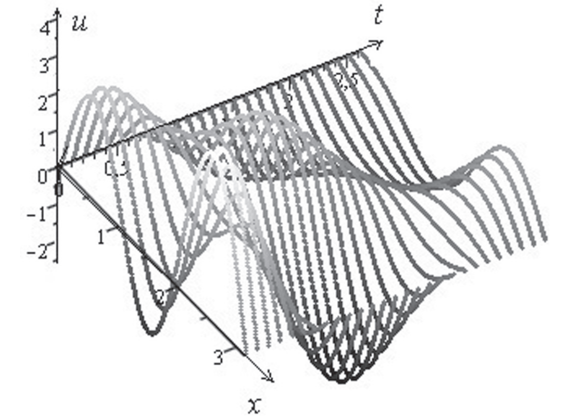

Рис. 1. График приближенного решения задачи (10)–(12)

Пример 2. Требуется найти численное решение задачи (1), (2), (4) при $\lambda = \lambda' = -9$, $\lambda'' = 0$, $\alpha = \beta = 1$, $f(u) = u^3$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u_0 = \sin(x) - \sin(2x) + 3\sin(3x)$, $u_1 = 5\sin(x)$ на отрезке $[0, \pi]$. Решение. Задача (1), (2), (4) примет вид

$$(-9-\Delta)\ddot{u}=(\Delta+9)\dot{u}+\Delta u+\Delta(u^3), \qquad (14)$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \qquad (15)$$

$$(-9-\Delta)\left(u(x,0)-\sin x+\sin 2x-3\sin 3x\right)=0,\; (-9-\Delta)\left(\dot{u}(x,0)-5\sin x\right)=0. \qquad (16)$$

Уравнение (14) является вырожденным. В силу (9) решение имеет вид

$$\widetilde{u}(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(u_1(t)\sin(x)+u_2(t)\sin(2x)+u_3(t)\sin(3x)).$$

Проделав те же процедуры, что и в примере 1, получим алгебро-дифференциальную систему уравнений (17).

Алгебраическое уравнение определяет фазовое пространство уравнения (14). Решив систему из двух дифференциальных уравнений, подставив результат в алгебраическое уравнение, получим решение задачи (14)–(16).

$$\begin{cases} -10,0265\left(\frac{d^2}{dt^2}u_1(t)\right)=10,0265\left(\frac{d}{dt}u_1(t)\right)+0,598414(u_1(t))^2u_3(t)-0,598414(u_2(t))^2u_3(t) \\ \quad -1,19683u_1(t)(u_2(t))^2-1,19683u_1(t)(u_3(t))^2-2,50663u_1(t)-0,598414(u_1(t))^3, \\ -6,26657\left(\frac{d^2}{dt^2}u_2(t)\right)=-6,26657\left(\frac{d}{dt}u_2(t)\right)-6,26657u_2(t)-4,78732u_2(t)(u_3(t))^2- \\ \quad -4,78732(u_1(t))^2u_2(t)-4,78732u_1(t)u_2(t)u_3(t)-2,39366\left(u_2(t)\right)^3, \\ 0=10,7715u_1(t)(u_2(t))^2+10,7715(u_2(t))^2u_3(t)-1,79524(u_3(t))^3+12,5313u_3(t)+ \\ \quad +5,38573(u_3(t))^3+5,38573u_1(t)(u_2(t))^2. \end{cases} \qquad (17)$$

В таблице приведено численное решение алгебро-дифференциальной системы при начальных условиях

$$u_1(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ u_2(0)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \dot{u}_1(0)=5\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \dot{u}_2(0)=0\,.$$

Приближенное решение системы (17)

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$
0	1,253	-1,253	-0,152
0,1	1,853	-1,272	-0,070
0,2	2,408	-1,340	0,018
0,3	2,929	-1,482	0,081
0,4	3,429	-1,734	0,098
0,5	3,925	-2,154	0,045
0,6	4,439	-2,845	0,116
0,7	5,010	-3,998	-0,450
0,8	5,713	-6,042	-1,032
0,9	6,744	-10,228	-1,968
1,0	8,8407	-23,046	-3,618

На рис. 2 изображено фазовое пространство (16). На рис. 3 построено поточечно численное решение примера 2 с шагами $\Delta x = 0{,}002$ и $\Delta t = 0{,}1$

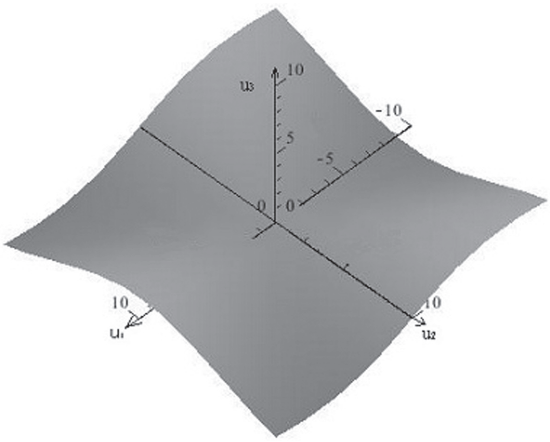

Рис. 2. Фазовое пространство уравнения (16)

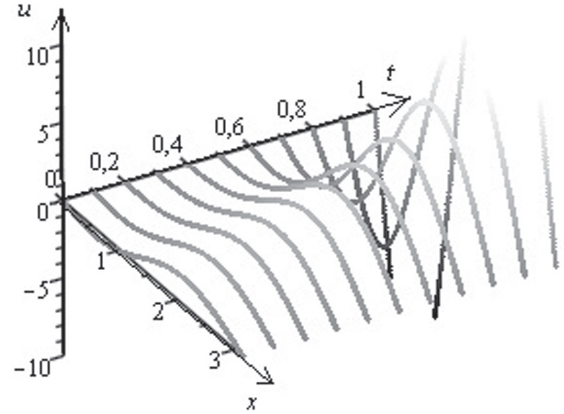

Рис. 3. График приближенного решения задачи (16)–(18)

БЛАГОДАРНОСТЬ

Выражаю благодарность Георгию Анатольевичу Свиридюку за поддержку и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З а г р е б и н а С. А. Начально-конечная задача для линейной системы уравнений Навье – Стокса // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2011. № 4 (221). Вып. 7. С. 35–39.
2. З а м ы ш л я е в а А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 4. С. 45–54.
3. З а м ы ш л я е в а А. А. Начально-конечная задача для неоднородного уравнения Буссинеска – Лява // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2011. № 37 (254). Вып. 10. С. 22–29.
4. З а м ы ш л я е в а А. А., Б ы ч к о в Е. В. Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2012. № 18 (27). Вып. 12. С. 13–19.
5. С о л д а т о в А. П., Ш х а н у к о в М. Х. Краевые задачи с нелокальными условиями А. А. Самарского для псевдопараболического уравнения высокого порядка // ДАН. 1987. Т. 297. № 3. С. 547–552.
6. Z a m y s h l y a e v a A., B y c h k o v E. The Cauchy problem for the second order semilinear Sobolev type equation // Global and stochastic Analysis. 2012. Vol. 2. № 1. P. 159–166.