

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ БАБКИН

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики строительного факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
babkin@karelia.ru

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОЙ ПРИСТЕНОЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ВОДЫ И ВОЗДУХА*

В результате сравнения решений задач о сопротивлении и теплообмене при турбулентных течениях воды и воздуха в трубах и плоских каналах, полученных в рамках модели пристеночной анизотропной турбулентности, с известными эмпирическими формулами найдены зависимости от температуры коэффициентов, определяющих турбулентную вязкость и турбулентную теплопроводность воды и воздуха в этой модели.

Ключевые слова: модель пристеночной турбулентности, турбулентная вязкость, турбулентная теплопроводность, температурная зависимость для воды и воздуха

ВВЕДЕНИЕ

В модели анизотропной пристеночной турбулентности турбулентное течение жидкости рассматривается как течение анизотропной жидкости, анизотропия которой определяется когерентной системой вихрей, вытянутых по потоку [1], [2]. Кинематическими параметрами, которыми задается движение в точке потока в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 , являются скорость u_i и единичный вектор, задающий локальную анизотропию, – директор n_i .

Все локальные величины, характеризующие состояние и движение системы, по определению считаются объемно осредненными. Для несжимаемой жидкости уравнения движения имеют вид [1], [2]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial p_{ia}}{\partial x_a} + \rho f_i, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(I \frac{dn_i}{dt} \right) = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_j} + g_i + \rho F_i, \quad (3)$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = p_{ij} e_{ij} + \beta_{ij} N_{ij} - g_i N_i + Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (4)$$

где t – время, ρ – плотность жидкости, u_i – скорость, p_{ij} – напряжения, f_i – плотность массовой силы, U – внутренняя энергия единицы массы, Q – интенсивность источника тепла, q_i – поток тепла. Величины β_{ij} , g_i , F_i называются соответственно обобщенным напряжением, обобщенной внутренней и обобщенной внешней массовой силой. Величина I характеризует осредненную инерционность структуры при повороте элементов вихревой структуры. По повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Определяющие уравнения учитывают специфику среды. В рассматриваемой модели они имеют вид

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij} + \tau_{ij}, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = K n_{\alpha,i} (n_{j,\alpha} - n_{\alpha,j} + n_j n_{\beta} n_{\alpha,\beta}), \quad (6)$$

$$\tau_{ij} = \mu_1 n_{\alpha} n_{\beta} e_{\alpha\beta} n_i n_j + \mu_0 e_{ij}, \quad (7)$$

$$\beta_{ij} = \kappa_j n_i + K (n_{i,j} - n_{j,i} - n_j n_{\alpha} n_{i,\alpha}), \quad (8)$$

$$g_i = \chi n_i - (\kappa_{\beta} n_i)_{,\beta} + K n_{\alpha} n_{\beta,\alpha} n_{\beta,i}, \quad (9)$$

$$q_i = -(\lambda_0 T_{,i} + \lambda_1 n_i n_j T_{,j}), \quad (10)$$

$$n_{i,j} = \frac{\partial n_i}{\partial x_j}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \dot{n}_i = \frac{dn_i}{dt},$$

$$N_i = \dot{n}_i - \omega_{i\alpha} n_{\alpha}, \quad N_{ij} = \dot{n}_{i,j} - \omega_{i\alpha} n_{\alpha,j}, \quad 2\omega_{ij} = u_{ij} - u_{ji}.$$

Здесь p – давление, T – температура, σ_{ij} – напряжения, обусловленные наличием в среде вихревой структуры, τ_{ij} – вязкие напряжения, λ_0 , λ_1 , μ_0 , μ_1 , K – коэффициенты модели, δ_{ij} – символ Кронекера, χ и κ_i – произвольные скалярная и векторная функции соответственно. Поскольку свойства жидкости вблизи твердой стенки определяются пристеночной вихревой структурой потока, то коэффициенты λ_0 , λ_1 , μ_0 , μ_1 , K могут зависеть от параметров, глобально характеризующих течение, например от числа Рейнольдса.

Характерными величинами, определяющими турбулентную вязкость и турбулентную теплопроводность жидкости, являются коэффициенты λ_0 , λ_1 , μ_0 , μ_1 . При течениях в трубе радиусом R и в плоском канале шириной $2H$ их величины для воздуха при температуре $T = 20$ °С и при нормальном давлении найдены [1], [2] сравнением решений ряда задач с опытными данными: $\mu_0 = 1,85 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $\mu_1 = 0,047 u_*$ Па·с, $\lambda_0 = 0,28 Ru_*$ Вт/(м·К) ($0,28 Hu_*$ для плоского канала), $\lambda_1 = 46,5 u_*$ Вт/(м·К), где $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость. Определению зависимости коэффициентов μ_0 ,

$\mu_1, \lambda_0, \lambda_1$ для воды и воздуха от температуры посвящена настоящая работа.

КОЭФФИЦИЕНТЫ μ_0 И μ_1

Решение задачи об установившемся турбулентном течении несжимаемой жидкости (воды или воздуха) в круглой трубе при постоянной температуре в рамках рассматриваемой модели в цилиндрической системе координат r, φ, x (ось x – по оси трубы в направлении течения) имеет вид [1], [2]

$$u = Au_s[\Phi(\xi) - \Phi(1)], \quad \Phi(\xi) = F(t(\xi)), \quad t(\xi) = [1 - 3bR(1 - \xi)]^{1/3}, \quad (11)$$

$$F(t) = \frac{3bR - 1}{2\gamma^2 - 1} \left(\sqrt{\gamma^2 - 1} \arctg \frac{t}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\gamma - t}{\gamma + t} \right) + \frac{1 + 2\varepsilon}{4(2\gamma^2 - 1)} \ln \frac{\gamma^2 - t^2}{t^2 + \gamma^2 - 1} + \frac{1}{4} \ln |t^4 - t^2 - \varepsilon| + \frac{t^2}{2},$$

$$A = \frac{\rho u_*}{3\mu_1 b^2 R}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \varepsilon = \frac{\mu_0}{2\mu_1}, \quad 2\gamma^2 = 1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}, \quad \xi = \frac{r}{R},$$

где b – постоянная интегрирования уравнения, задающего изменение директора по сечению потока, определяется экспериментально.

Определяя профили скоростей (11) при разных температурах с учетом теплофизических свойств обеих сред [7], [8] и сравнивая эти профили с универсальным профилем трубы [4]

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{(R - r)u_*}{\nu} + 5,5, \quad (12)$$

где ν – кинематическая вязкость воды или воздуха, для каждого значения температуры получаем величины μ_0, μ_1 и b .

Ограничимся диапазоном температур от 0 до 100 °С. Как оказалось, коэффициенты μ_0, μ_1 для воды и воздуха при изменении температуры ведут себя различно. Для воды при 5 °С ≤ T ≤ 100 °С имеем

$$b = 4,80 \text{ м}^{-1}, \quad \mu_0 = (2,63 - 1,20 \lg T)^{-4}, \quad \mu_1 = 40u_*, \quad (13)$$

тогда как для сухого воздуха при 0 °С ≤ T ≤ 100 °С

$$b = 4,80 \text{ м}^{-1}, \quad \mu_0 = 2,0 \cdot 10^{-6}, \quad \mu_1 = u_*(0,051 - 0,00012T), \quad (14)$$

где T – температура в градусах Цельсия, μ_0 и μ_1 – в Па · с, u_* – в м/с.

Совершенно аналогично, сравнивая профили скоростей при течении несжимаемой жидкости в плоском канале шириной $2H$, полученные на базе рассматриваемой модели [1], [3], с универсальным профилем для канала

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{(H - |y|)u_*}{\nu} + 5,5, \quad (15)$$

получаем те же формулы (13) и (14). В формуле (15) $(H - |y|)$ – расстояние от стенки канала до точки потока с координатой y , отсчитываемой от срединной плоскости канала перпендикулярно течению.

На рис. 1 и 2 профили скоростей (точки) для течений воды и воздуха в гладкой трубе диаметром $d = 80$ мм и гладком канале шириной $2H = 80$ мм при 0 °С или 10 °С и 100 °С, вычисленные с учетом формул (13) и (14), при разных числах Рейнольдса ($Re = 2wR/\nu$ для круга и $Re = 4wH/\nu$ для канала, w – средняя скорость) сравниваются с универсальным профилем скоростей [4]

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \eta + 5,5, \quad \eta = \frac{su_*}{\nu}, \quad (16)$$

где s – расстояние от твердой стенки до точки в потоке.

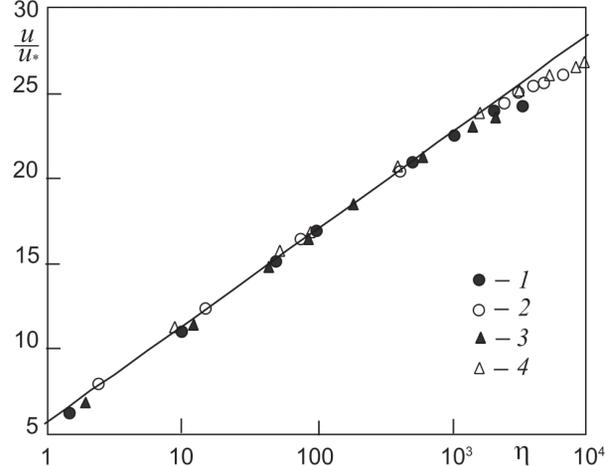


Рис. 1. Профили скоростей при течении воды в трубе и плоском канале при $T = 10$ °С, 100 °С. Кривая – универсальный профиль (16). Точки – результат расчета: 1 – труба, 10°, $Re = 285000$; 2 – труба, 100°, $Re = 420000$; 3 – канал, 10°, $Re = 404000$; 4 – канал, 100°, $Re = 970000$

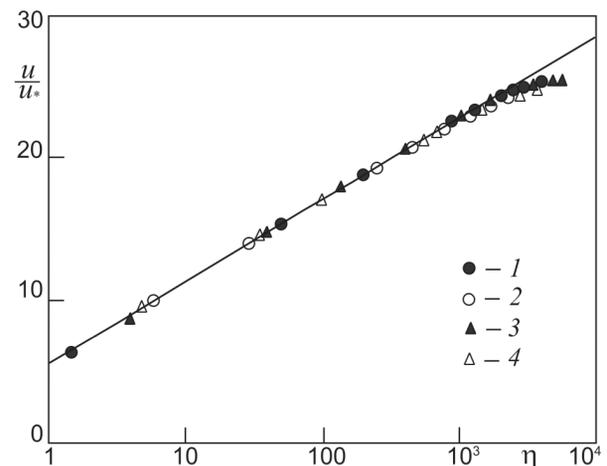


Рис. 2. Профили скоростей при течении воздуха в трубе и плоском канале при $T = 0$ °С, 100 °С. Кривая – универсальный профиль (16). Точки – результат расчета: 1 – труба, 0°, $Re = 243000$; 2 – труба, 100°, $Re = 227000$; 3 – канал, 0°, $Re = 510000$; 4 – канал, 100°, $Re = 474000$

Стоит отметить, что значения μ_0, μ_1 для воздуха при 20 °С, которые следуют из формул (14), близки указанным во введении значениям, которые ранее были получены на основе конкретных опытных данных.

КОЭФФИЦИЕНТЫ λ_0 и λ_1

Процессы теплообмена в трубах и каналах описываются уравнением распространения тепла, которое в рамках данной модели следует из уравнений (4) и (10). Пусть в гладкой круглой полубесконечной трубе $x \geq 0$ радиуса R требуется найти установившееся распределение температуры $T(r, x)$ при установившемся турбулентном течении несжимаемой жидкости, при постоянной температуре стенки T_w и постоянной температуре T_0 на входном сечении $x = 0$. В безразмерных переменных

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad X = \frac{x}{R}, \quad (17)$$

в цилиндрических координатах r, φ, x при $Q = 0$ уравнение распространения тепла имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \Psi_1(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \Psi_2(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (18)$$

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{\xi} - \frac{2\lambda_1 b R}{t(\xi) [\lambda_0 + \lambda_1 (1 - t^2(\xi))]},$$

$$\Psi_2(\xi) = \frac{\rho c_p u_* A R (\Phi(\xi) - \Phi(1))}{\lambda_0 + \lambda_1 (1 - t^2(\xi))},$$

где c_p – теплоемкость при постоянном давлении, λ_0 и λ_1 – коэффициенты, через которые определяется поток тепла q_i по формуле (10), $t(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ – функции, определенные в (11).

Решение уравнения (18) с граничными условиями

$$\Theta(\xi, 0) = 1, \quad \Theta(1, X) = 0 \quad (19)$$

позволяет найти коэффициент теплоотдачи на стенке трубы в виде локального числа Нуссельта Nu по формулам [1], [2]

$$Nu = - \frac{2\lambda_0}{\lambda \bar{\Theta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}, \quad \bar{\Theta}(X) = \frac{2}{w} \int_0^1 \Theta(\xi, X) u(\xi) \xi d\xi, \quad (20)$$

где $\bar{\Theta}$ – средняя массовая температура по сечению трубы, λ – коэффициент молекулярной теплопроводности, w – средняя скорость.

Значения числа Нуссельта Nu , вычисленные при температурах воды и воздуха в диапазоне от нуля до 100 °С и при разных числах Рейнольдса Re , сравнивались со значениями Nu , которые при тех же условиях течения для предельного числа Нуссельта Nu_∞ даются соответственно работам [5], [9], [6] эмпирическими формулами:

$$Nu_\infty = \frac{f Re Pr / 8}{1 + \frac{900}{Re} + 12,7 \sqrt{\frac{f}{8}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right)}, \quad (21)$$

$$Nu_\infty = \frac{Re Pr \sqrt{f/2}}{4,24 \ln(Re \sqrt{f/16}) + 25,0 Pr^{2/3} + 4,24 \ln Pr - 20,2}, \quad (22)$$

$$Nu_\infty = 7,6 - \frac{3,6}{\lg Re} + 0,0096 Re^{0,87} Pr^{0,605}, \quad (23)$$

$$Pr = \frac{\rho v c_p}{\lambda}, \quad f = \frac{1}{(1,82 \lg Re - 1,64)^2}. \quad (24)$$

Как и для коэффициентов μ_0, μ_1 , зависимость коэффициентов λ_0, λ_1 от температуры для воды и воздуха различна. Для воды при течении в трубе при 5 °С ≤ T ≤ 100 °С она имеет вид

$$\lambda_0 = G(T) \sqrt{f/8}, \quad \lambda_1 = 12000 u_*, \quad G(T) = 0,0360 - 0,000211 T. \quad (25)$$

Для воздуха

$$\lambda_0 = u_* R (0,30 - 0,001 T), \quad \lambda_1 = 46,5 u_*. \quad (26)$$

В формулах (25) и (26) T – температура в градусах Цельсия, λ_0, λ_1 – в Вт/(м · К), R – в метрах, u_* – в м/с.

Следуя работе [3], при условии, что пристеночная турбулентность заполняет всю область течения, сравнением с эмпирическими формулами (21)–(23) можно получить аналоги формул (25) и (26) при теплообмене в плоском канале шириной $2H$. Для воды

$$\lambda_0 = 0,5 G(T) \sqrt{f/8}, \quad \lambda_1 = 12000 u_*, \quad G(T) = 0,0360 - 0,000211 T. \quad (27)$$

Для воздуха

$$\lambda_0 = u_* H (0,30 - 0,001 T), \quad \lambda_1 = 46,5 u_*. \quad (28)$$

При течении в канале числа Рейнольдса Re и Нуссельта Nu определяются формулами [5]:

$$Re = \frac{4wH}{v}, \quad (29)$$

$$Nu = - \frac{4\lambda_0}{\lambda \bar{\Theta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}, \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{w} \int_0^1 \Theta(\xi, X) u(\xi) d\xi, \quad (30)$$

где Θ – безразмерная температура, определяемая формулой (17), $\bar{\Theta}$ – средняя массовая температура, $\xi = y/H$ – безразмерная поперечная координата в канале, отсчитываемая от срединной плоскости канала.

На рис. 3 представлены графики зависимостей предельного числа Нуссельта Nu_∞ от числа Рейнольдса Re при течении воды в трубе и плоском канале при постоянной температуре стенок, вычисленные на основе решений [1], [2], [3] при температуре воды 10 °С и при 100 °С с использованием формул (13), (25) и (27) (точки), а также соответствующие графики формул (21)–(23) (кривые 1–3 для 10 °С; кривые 1'–3' для 100 °С). Поскольку для воздуха аналогичные зависимости вплоть до 100 °С различаются несильно, на рис. 4 приведены графики расчетных величин (точки) и формул (21)–(23) только при температуре 100 °С. Все расчеты проведены для трубы диаметром $d = 80$ мм и канала шириной $2H = 80$ мм. Как видим, результаты расчетов вполне удовлетворительно согласуются с эмпирическими формулами. Отметим, что при 20 °С для воздуха из формул (28) следуют значения λ_0, λ_1 , указанные во введении.

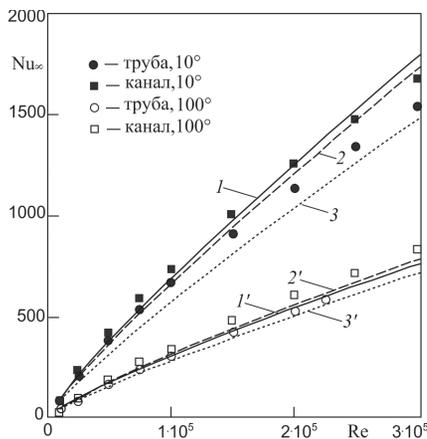


Рис. 3. Зависимость предельного числа Нуссельта Nu_{∞} от числа Рейнольдса Re для воды в трубе и канале при $T = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Точки – результат расчета; кривые – графики эмпирических формул: 1, 1' – (21) [5]; 2, 2' – (22) [9]; 3, 3' – (23) [6]

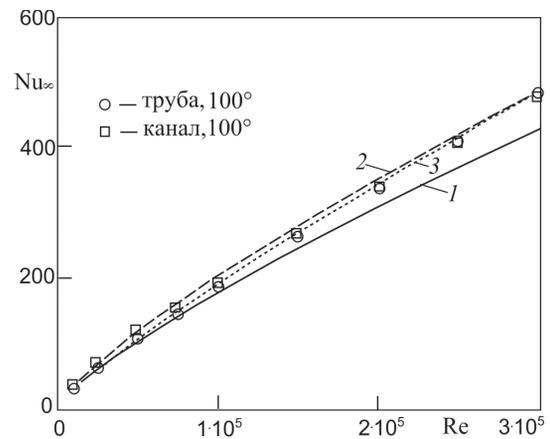


Рис. 4. Зависимость предельного числа Нуссельта Nu_{∞} от числа Рейнольдса Re для воздуха в трубе и канале при $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Точки – результат расчета; кривые – графики эмпирических формул: 1 – (21) [5]; 2 – (22) [9]; 3 – (23) [6]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данной работе зависимости коэффициентов μ_0 , μ_1 , λ_0 , λ_1 от температуры, с одной стороны, увеличивают круг задач, которые можно численно решать в рамках модели пристеночной анизотропной турбулентности, а с другой стороны, расширяют наши представления о тур-

булентности в таких широко используемых средах, как вода и воздух. В частности, очевидно наблюдаемое различие в поведении коэффициентов, определяющих турбулентную вязкость и турбулентную теплопроводность воды и воздуха при увеличении температуры сред.

* Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития (ПСР) ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсеньев С. А., Бабкин В. А., Губарь А. Ю., Николаевский В. Н. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 308 с.
2. Бабкин В. А. Профили скоростей и теплообмен при турбулентных течениях в гладкой и шероховатой трубах // Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 1. С. 51–54.
3. Бабкин В. А. Теплообмен при турбулентном течении несжимаемой жидкости в плоском канале с постоянной температурой стенок // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2011. № 6 (119). С. 72–77.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
5. Петухов Б. С., Поляков А. Ф. Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986. 192 с.
6. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.
7. Хомутский Ю. Физические и теплофизические свойства воздуха [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://alldc.ru/article147>
8. Хомутский Ю. Физические и теплофизические свойства воды [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://alldc.ru/article151>
9. Kader B. A., Yaglom A. M. Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. № 12. P. 2329–2351.