УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Декабрь, № 8. Т. 2 **Физико-математические науки** **2012**

УДК 519.177

АНТОН НИКОЛАЕВИЧ ВОРОПАЕВ
преподаватель кафедры прикладной математики и кибернетики математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
voropaev@petrsu.ru

ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЦИКЛОВ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНЫ В ГРАФАХ ЛАДЬИ*

Рассматривается техника символьных вычислений по явным формулам для подсчета циклов фиксированной длины в неориентированных графах. Детали аналитических преобразований сумм, входящих в формулы, иллюстрируются на примере семейства графов ладьи на досках размера $N \times N$. На основе явных выражений для количества циклов длин 3, 4, …, 7 выведены многочлены, описывающие зависимость данных величин от N в случае графов ладьи.

Ключевые слова: подсчет циклов фиксированной длины в неориентированных графах, графы ладьи

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от многих других подходов к подсчету циклов, явные формулы [1], [4], [5], [6] позволяют свести определение числа циклов длины k к вычислению количества произвольных маршрутов длины не более k с фиксированными начальными и конечными вершинами. Подсчет маршрутов без ограничения на их структуру в виде различия вершин обычно оказывается более простой задачей по сравнению с определением самого количества циклов. В частности, при достаточно регулярной структуре графов некоторого параметризованного семейства удается аналитически выразить зависимость количества маршрутов от значения параметра. Воспользовавшись далее явными формулами, можно вывести выражение и для числа циклов. Возможность таких символьных вычислений отмечалась ранее в [3], однако подробно в литературе не освещалась.

Целью настоящей работы является демонстрация основных способов аналитического преобразования сумм, входящих в явные формулы. Все необходимые построения иллюстрируются на примере семейства графов ладьи, соответствующих доскам размера $N \times N$.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Графом ладьи для доски размера $N \times N$ будем называть граф, вершины которого соответствуют клеткам доски, а ребра – парам клеток, таким что ладью можно переставить с одной клетки на другую за один ход. Определенный таким образом граф содержит N^2 вершин, $N^2(N-1)$ ребер и является регулярным. Степень каждой вершины графа ладьи равна $2(N-1)$.

Маршрутом длины k называется упорядоченный набор $(v_1; v_2; \ldots; v_{k+1})$ вершин графа, в котором каждые две соседние вершины v_i и v_{i+1} смежны. Маршрут длины не менее 3, для которого все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ различны, а $v_{k+1} = v_1$, называется циклом. При подсчете циклы, отличающиеся только выбором начальной вершины или направления обхода вершин, будут рассматриваться как один.

Количество циклов длины k обозначим символом c_k, а буквы n и A будем использовать для обозначения порядка (числа вершин) и матрицы смежности графа ладьи. Элементы матриц A и A^k записываются как a_{ij} и $a_{ij}^{(k)}$. Величина $a_{ii}^{(2)}$ равна степени вершины i и будет обозначаться символом d_i.

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ЦИКЛОВ

Явные формулы представляют собой комбинации сумм, члены которых являются произведениями элементов матрицы смежности и ее степеней. Например, количество циклов длин 3, 4, …, 7 в произвольном графе можно определить по следующим формулам [1], [2], [5], [6]:

$$
\begin{aligned}
&c_4 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii}^{(4)} - 2d_i^2 + d_i\right), \quad c_5 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii}^{(5)} - 5a_{ii}^{(3)}(d_i - 1)\right),\\
&c_3 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(3)}, \quad c_6 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(6)} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(a_{ii}^{(3)}\right)^2 + 2a_{ii}^{(4)}(d_i - 1)\right) +\\
&\qquad + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i\left(d_i^2 - 3d_i + 1\right) - a_{ii}^{(3)}\right) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(3\left(a_{ij}^{(2)}\right)^2 a_{ij} + a_{ij}^{(3)}\right), \qquad (1)\\
&c_7 = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(7)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii}^{(5)}(d_i - 1) + a_{ii}^{(3)}\left(a_{ii}^{(4)} - 2d_i^2 + 11d_i - 8\right)\right) +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{(2)} a_{ij}\left(\left(a_{ij}^{(2)}\right)^2 + 3a_{ij}^{(3)} + d_i d_j - 4a_{ij}^{(2)}\right) + a_{ij}^{(2)} a_{jj}^{(3)}\right).
\end{aligned}
$$

Символьное преобразование выражений (1) для заданного параметризованного семейства графов возможно при наличии формул, описывающих зависимость величин $a_{ij}^{(k)}$ от параметра семейства. В следующем разделе представлены такие формулы в случае графов ладьи.

ПОДСЧЕТ МАРШРУТОВ В ГРАФАХ ЛАДЬИ

Количество маршрутов длины k, соединяющих фиксированные вершины (клетки) i и j, в графе ладьи определяется одним из трех вариантов взаимного расположения i и j: клетки совпадают; клетки различны, но расположены в одном ряду доски; клетки расположены в разных рядах.

В случае $i = j$ значение $a_{ij}^{(k)}$ выражается следующей общей формулой.

Утверждение 1. *Для всякого натурального $k \geq 2$*

$$a_{ii}^{(k)} = \frac{1}{N^2}\left(2(N-1)(N-2)^k + 2^k(N-1)^k + (-2)^k(N-1)^2\right). \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $W_S(l)$, где $S \subset \{1;2;\ldots;l\}$, – множество всех замкнутых маршрутов ладьи длины l с фиксированной начальной клеткой, в которых ходы с номерами из множества S выполняются в горизонтальном направлении, а остальные ходы – в вертикальном направлении. Тогда, очевидно, множество $W_S(l)$ равномощно произведению $W_\varnothing(|S|) \times W_\varnothing(l-|S|)$ (весь маршрут разбивается на подпоследовательности из горизонтальных и вертикальных ходов), и

$$a_{ii}^{(k)} = \sum_{S\subset\{1;2;\ldots;k\}} |W_S(k)| = \sum_{S\subset\{1;2;\ldots;k\}} |W_\varnothing(|S|)|\cdot|W_\varnothing(k-|S|)| = \\ = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cdot|W_\varnothing(l)|\cdot|W_\varnothing(k-l)|, \quad (3)$$

если по определению считать, что $|W_\varnothing(0)| = 1$.

Обозначим величину $|W_\varnothing(l)|$, равную количеству замкнутых маршрутов ладьи длины l с фиксированной начальной клеткой *в одном ряду* доски, символом $f(l)$. Для небольших значений $l = 0, 1, 2$ имеем

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = N-1, \quad (4)$$

а при $l > 2$ величину $f(l)$ можно выразить через $f(l-1)$. Для очередного хода ладьи существует $N-1$ вариантов, а l-м ходом ладья сумеет попасть в начальную клетку, если только она не оказалась именно в этой клетке через $l-1$ ход:

$$f(l) = (N-1)^{l-1} - f(l-1). \quad (5)$$

Решение рекуррентного соотношения (5) с начальными условиями (4) описывается следующей явной формулой:

$$f(l) = \frac{1}{N}\left((N-1)^l + (-1)^l(N-1)\right). \quad (6)$$

Подстановка (6) в (3) и упрощение результата дает искомую формулу (2). □

Выражение (2) позволяет сразу же вычислить путем подстановки в (1) любые суммы с одним индексом. В частности, данного соотношения достаточно для выражения величин c_3, c_4 и c_5 через параметр N. Формулы же для c_6 и c_7 помимо диагональных элементов d_i, $a_{ii}^{(3)}$, $a_{ii}^{(4)}$, …, $a_{ii}^{(7)}$ включают недиагональные элементы $a_{ij}^{(2)}$ и $a_{ij}^{(3)}$. Значения указанных элементов представлены в следующем утверждении.

Утверждение 2. *Для различных клеток i и j*

$$a_{ij}^{(2)}, a_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 2,\ 6(N-2), & \text{если } i \text{ и } j \text{ расположены в разных рядах;} \\ N-2,\ N^2, & \text{если } i \text{ и } j \text{ расположены в одном ряду.} \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Случай $a_{ij}^{(2)}$. Если клетки i и j находятся в разных рядах доски, то первым ходом ладью необходимо переместить в один ряд с клеткой j, а вторым ходом – в саму клетку j. Для первого хода имеются две возможности: по горизонтали или по вертикали. В случае же, когда i и j находятся в одном ряду, то после первого хода ладья должна остаться в этом же ряду, но не попасть в саму клетку j. Количество вариантов осуществления такого хода равно $N-2$, по числу клеток ряда, за исключением i и j.

Случай $a_{ij}^{(3)}$. Когда клетки i и j расположены в разных рядах доски, ладья после первого хода попадет в один ряд с j (2 варианта) или вновь окажется в разных рядах с j ($2(N-2)$ вариантов). В первом случае останется $N-2$ возможности попасть в j за два хода, а во втором – только 2 способа. Общее количество маршрутов составляет $2\cdot(N-2) + 2(N-2)\cdot 2 = 6(N-2)$. Если же клетки i и j расположены в одном ряду, то в результате первого хода будет иметь место одна из трех ситуаций: ладья находится в клетке j (1 вариант); в одном ряду с j, но не в самой клетке j ($N-2$ варианта); в разных рядах с j ($N-1$ вариант). Остается переместить ладью в клетку j за два хода: $1\cdot 2(N-1) + (N-2)\cdot(N-2) + (N-1)\cdot 2 = N^2$. □

При вычислении двойных сумм непосредственной подстановкой выражений (2) и (7) в общий член суммы не обойтись, так как взаимное расположение вершин i и j меняется по мере того, как они независимо друг от друга пробегают всевозможные значения от 1 до n. Необходимо предварительно разбить область суммирования таким образом, чтобы в рамках каждой из подобластей сохранялось постоянное взаимное расположение вершин i и j, а следовательно, и значение общего члена суммы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ СУММ ДЛЯ ГРАФОВ ЛАДЬИ

В случае двух индексов возникают три подобласти суммирования в соответствии с вариантами взаимного расположения, перечисленными в предыдущем разделе.

Утверждение 3. *Пусть $f(i; j)$ – многочлен, составленный из величин $a_{ij}^{(k)}$, а f_0, f_1 и f_2 – значения $f(i; j)$ на тех наборах индексов, для которых клетки i и j расположены в разных рядах ($t = 0$); в одном ряду, но различны ($t = 1$); совпадают ($t = 2$). Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i; j) = N^2\cdot\left(f_2 + 2(N-1)f_1 + (N-1)^2 f_0\right). \quad (8)$$

Доказательство. Для каждой клетки i насчитывается $2(N-1)$ клеток, расположенных в одном горизонтальном или вертикальном ряду с i. Клетки же, не попадающие в один ряд с i, заполняют часть доски, получаемую вычеркиванием рядов, которые проходят через клетку i. Количество таких клеток равно $(N-1)^2$. □

Применительно к суммам (1), за исключением последних слагаемых в формулах для c_6 и c_7, правило (8) существенно упрощается, так как благодаря наличию множителя a_{ij} всегда $f_2 = f_0 = 0$.

Следствие. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{f}(i;j)a_{ij} = 2N^2(N-1)\widetilde{f}_1$.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЦИКЛОВ В ГРАФАХ ЛАДЬИ

На основе явных формул для подсчета циклов, используя соотношение (7) непосредственно, а также с применением правила (8), можно аналитически выразить зависимость величин c_3, c_4, …, c_7 от параметра N для графов ладьи.

Утверждение 4. *Количество циклов длин 3, 4, …, 7 в графах ладьи на доске $N \times N$ выражается формулами*:

$$c_3 = \frac{F}{3}, \quad c_4 = \frac{1}{4}N^2(N-1)(N^2-4N+5),$$
$$c_5 = \frac{F}{5}(N^2-2N+7), \quad c_6 = \frac{F}{6}(N+2)(N^2+2N-11), \tag{9}$$
$$c_7 = \frac{F}{7}(N^4+24N^3-133N^2+134N+94),$$
$$\textit{где} \quad F = N^2(N-1)(N-2).$$

Для случаев, когда значение длины цикла больше 7, представленного выше набора правил преобразования сумм недостаточно, поскольку в соответствующих явных формулах встречаются суммы кратности 4 и более [2], [3], [4]. Кроме того, увеличиваются степени матрицы смежности, недиагональные элементы которых участвуют в формулах. Однако идея разбиения областей суммирования обобщается на суммы произвольной кратности, а значения недиагональных элементов также могут быть вычислены в общем виде, наподобие (2). В частности, можно показать, что для графов ладьи значения всех сумм, участвующих в явных формулах, являются многочленами от N. Следовательно, в силу полиномиальности самих формул для c_k зависимость величины c_k от N в случае графов ладьи также всегда описывается многочленом от N. Общий способ разбиения сумм произвольной кратности предполагается детально рассмотреть в отдельной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в данной работе техника символьных вычислений по явным формулам не ограничена семейством графов ладьи и применима к разнообразным классам других графов с достаточно регулярной структурой. Основная ценность предложенного подхода к аналитическому подсчету циклов на основе явных формул состоит в том, что сами формулы уже «содержат» существенную информацию о числе циклов и остается лишь предоставить вспомогательные данные, получение которых не столь затруднительно по сравнению с выводом выражений для количества циклов из первых принципов.

* Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития (ПСР) ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воропаев А. Н. Подсчет простых циклов фиксированной длины в графах. Явные формулы для случая малых длин // Научное творчество молодежи: Материалы XIII Всеросс. науч.-практ. конф. (г. Анжеро-Судженск, 14–15 мая 2009 г.). Томск: Изд-во Томского ун-та, 2009. Ч. 1. С. 21–23.
2. Воропаев А. Н. Вывод явных формул для подсчета циклов фиксированной длины в неориентированных графах // Информационные процессы. 2011. Т. 11. № 1. С. 90–113.
3. Воропаев А. Н., Перепечко С. Н. Количество простых циклов фиксированной длины в неориентированном графе. Явные формулы в случае малых длин // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. «Математика, информатика, физика». 2012. № 2. С. 5–11.
4. Alon N., Yuster R., Zwick U. Finding and counting given length cycles // Algorithmica. 1997. Vol. 17. № 3. P. 209–223.
5. Chang Y. C., Fu H. L. The number of 6-cycles in a graph // The Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications. 2003. Vol. 39. P. 27–30.
6. Harary F., Manvel B. On the number of cycles in a graph // Matematický časopis. 1971. Vol. 21. № 1. P. 55–63.