УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Март, № 2 Технические науки 2014

УДК 624.014.074:539.4

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ
кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
metalll@bk.ru

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ ИЗ НЕУПРУГИХ СОСТАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Рассматривается деформационный расчет плоских рамных систем, опоры которых под нагрузкой получают нелинейные поступательные и угловые смещения. Элементы рам – неупругие составные стержни, имеющие переменное поперечное сечение и переменную жесткость связей сдвига по длине. В основу решения положена теория упругих составных стержней А. Р. Ржаницына. Статическая неопределимость рам раскрыта методом деформаций. Жесткость составных элементов рассчитана с использованием выражения для определения эквивалентного модуля деформаций, ранее полученного автором, который учитывает сжимаемость ветвей, деформации сдвига материала ветвей, составляющих стержень, развитие неупругих деформаций в них.

Ключевые слова: плоская рама, неупругие составные стержни, деформационный расчет, эквивалентный модуль деформаций

Исследуются неупругие плоские рамы, включающие в себя составные элементы, имеющие переменное поперечное сечение и переменную жесткость связей на сдвиг по длине элементов. Опорные узлы рам под нагрузкой получают нелинейные поступательные и угловые смещения.

В работе используются основные положения общей теории упругих составных стержней, разработанной А. Р. Ржаницыным [2]. Для материала ветвей и связей между ветвями устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжениями. Применяется гипотеза о нелинейно-упругом материале. Раскрытие статической неопределимости рамной системы осуществляется методом деформаций с учетом влияния продольных сил, возникающих в элементах при деформировании рам под действием нагрузки.

Для определения перемещений плоской рамы стержень рамы делится по длине на m участков постоянной жесткости (в общем случае неравные) длиной l_j между узловыми точками j и $j + 1$. В узлы элементов рамы вводятся дополнительные моментные $1j$ и силовые $2j$ связи, препятствующие их перемещениям. Многоконтурный стержень рамы с введенными связями образует основную систему метода деформаций. Расчет такой рамы производится шаговым методом [1].

Для определения реакций во введенных связях j-й участок элемента рамы рассматривается как жестко защемленный по концам составной стержень длиной l_j или стержень, защемленный на одном конце и шарнирно опертый на другом конце. Дифференциальное уравнение изгиба упругого двухветвевого ($n = 2$) составного стержня было получено в [2]. При работе за пределом упругости уравнение для j-го участка стержня рамы, в котором действует продольная сила $N_j^{(i)}$, на i-м шаге загружения будет иметь вид

$$v_j^{1V(i)} + v_j''^{(i)}(N_j^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)} - \lambda_j^{2(i)}) - v_j^{(i)} N_j^{(i)} \lambda_j^{2(i)} / C_{oj}^{(i)} - \\ -\lambda_j^{2(i)} M_{cj}^{(i)} / C_{oj}^{(i)} + M_{xj}^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)} = 0, \qquad (1)$$

где $v_j^{(i)}$ – прогибы j-го участка стержня рамы на i-м шаге нагружения; $M_{cj}^{(i)}$ – изгибающий момент в составном стержне как в монолитном; $M_{xj}^{(i)}$ – изгибающий момент в составном стержне, лишенном связей сдвига; $C_{xj}^{equ(i)}$ – суммарная эквивалентная жесткость ветвей составного элемента на j-м участке элемента рамы при i-м шаге нагружения, равная

$$C_{xj}^{equ(i)} = \sum_{\upsilon=1}^{n} (E_{j\upsilon}^{equ(i)} J_{xj\upsilon}), \qquad (2)$$

здесь $E_{j\upsilon}^{equ(i)}$ – эквивалентный модуль деформаций для сечений υ-й ветви j-го участка элемента рамы на i-м шаге нагружения; $J_{xj\upsilon}$ – момент инерции поперечного сечения υ-й ветви, постоянный по длине j-го участка элемента рамы; $C_{oj}^{(i)}$ – приведенная жесткость сечения j-го участка элемента рамы как монолитного на i-м шаге нагружения, равная

$$C_{oj}^{(i)} = C_{xj}^{equ(i)} + E_{cj1}^{(i)} A_{j1} E_{cj2}^{(i)} A_{j2} c_j^2 / (\sum_{\upsilon=1}^{n} (E_{cj\upsilon}^{(i)} A_{j\upsilon}), \qquad (3)$$

здесь A_{j1} и A_{j2} – площадь поперечного сечения ветвей 1 и 2 j-го участка элемента рамы; c_j – расстояние между центрами тяжести ветвей составного элемента; $E_{cj1}^{(i)}$ и $E_{cj2}^{(i)}$ – секущие модули деформаций осевых волокон ветвей 1 и 2 на i-м шаге нагружения;

$$\lambda_j^{(i)} = \sqrt{\xi_j^{(i)} [\sum_{\upsilon=1}^{n} (1 / (E_{cj\upsilon}^{(i)} A_{j\upsilon}) + c_j^2 / C_{xj}^{equ(i)}]}, \qquad (4)$$

здесь $\xi_j^{(i)}$ – коэффициент жесткости продольных связей сдвига на j-м участке элемента рамы при i-м шаге нагружения.

Величина $E_{jv}^{equ(i)}$ в (2) определяется по формуле, полученной ранее автором статьи, опубликованной в [4] и использованной в [3].

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$v_j^{(i)} = \overline{C}_{1j}^{(i)} e^{(-k_{1j}^{(i)} z_j)} + \overline{C}_{2j}^{(i)} e^{(k_{1j}^{(i)} z_j)} + \overline{C}_{3j}^{(i)} e^{(-k_{2j}^{(i)} z_j)} + \\ + \overline{C}_{4j}^{(i)} e^{(k_{2j}^{(i)} z_j)} + (M_{jo}^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} z_j) / N_j^{(i)}, \tag{5}$$

где

$$(k_{1j}^{(i)})^2 = \frac{-N_j^{(i)} + \lambda_j^{2(i)} C_{xj}^{equ(i)}}{2C_{xj}^{equ(i)}} - \\ - \frac{\sqrt{N_j^{2(i)} - 2N_j^{(i)} \lambda_j^{2(i)} C_{xj}^{equ(i)} + \lambda_j^{2(i)} (C_{xj}^{equ(i)})^2 [\lambda_j^{2(i)} + 4N_j^{(i)}] / C_{oj}^{(i)})}}{2C_{xj}^{equ(i)}}, \tag{6}$$

$$(k_{1j}^{(i)})^2 = \frac{-N_j^{(i)} + \lambda_j^{2(i)} C_{xj}^{equ(i)}}{2C_{xj}^{equ(i)}} + \\ + \frac{\sqrt{N_j^{2(i)} - 2N_j^{(i)} \lambda_j^{2(i)} C_{xj}^{equ(i)} + \lambda_j^{2(i)} (C_{xj}^{equ(i)})^2 [\lambda_j^{2(i)} + 4N_j^{(i)}] / C_{oj}^{(i)})}}{2C_{xj}^{equ(i)}}. \tag{7}$$

В (5) $M_{jo}^{(i)}$ и $Q_{jo}^{(i)}$ – соответственно изгибающий момент и поперечная сила в j-м узле j-го участка стержня рамы (в сечении $z_j = 0$) при отсутствии на нем поперечной нагрузки. Производные от функции прогибов будут иметь вид

$$\begin{aligned} v_j'^{(i)} &= (\overline{C}_{1j}^{(i)} e^{(-k_{1j}^{(i)} z_j)} + \overline{C}_{2j}^{(i)} e^{(k_{1j}^{(i)} z_j)}) k_{1j}^{(i)} \ln(e) - \\ &- (\overline{C}_{3j}^{(i)} e^{(-k_{2j}^{(i)} z_j)} - \overline{C}_{4j}^{(i)} e^{(k_{2}^{(i)} z_j)}) k_{2j}^{(i)} \ln(e) - Q_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}, \\ v_j''^{(i)} &= (\overline{C}_{1j}^{(i)} e^{(-k_{1j}^{(i)} z_j)} + \overline{C}_{2j}^{(i)} e^{(k_{1j}^{(i)} z_j)}) k_{1j}^{2(i)} \ln(e)^2 - \\ &- (\overline{C}_{3j}^{(i)} e^{(-k_{2j}^{(i)} z_j)} - \overline{C}_{4j}^{(i)} e^{(k_{2}^{(i)} z_j)}) k_{2j}^{2(i)} \ln(e)^2, \\ v_j'''^{(i)} &= (\overline{C}_{1j}^{(i)} e^{(-k_{1j}^{(i)} z_j)} + \overline{C}_{2j}^{(i)} e^{(k_{1j}^{(i)} z_j)}) k_{1j}^{3(i)} \ln(e)^3 - \\ &- (\overline{C}_{3j}^{(i)} e^{(-k_{2j}^{(i)} z_j)} - \overline{C}_{4j}^{(i)} e^{(k_{2}^{(i)} z_j)}) k_{2j}^{3(i)} \ln(e)^3, \\ v_j^{IV(i)} &= (\overline{C}_{1j}^{(i)} e^{(-k_{1j}^{(i)} z_j)} + \overline{C}_{2j}^{(i)} e^{(k_{1j}^{(i)} z_j)}) k_{1j}^{4(i)} \ln(e)^4 - \\ &- (\overline{C}_{3j}^{(i)} e^{(-k_{2j}^{(i)} z_j)} - \overline{C}_{4j}^{(i)} e^{(k_{2}^{(i)} z_j)}) k_{2j}^{4(i)} \ln(e)^4. \end{aligned} \tag{8}$$

Используем метод начальных параметров. При $z_j = 0$ из (8) имеем

$$\begin{aligned} v_{jo}^{(i)} &= C_{1j}^{(i)} + C_{2j}^{(i)} + C_{3j}^{(i)} + C_{4j}^{(i)} + M_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}, \\ v_{jo}'^{(i)} &= -u_j^{(i)} (C_{1j}^{(i)} - C_{2j}^{(i)}) - v_j^{(i)} (C_{3j}^{(i)} - C_{4j}^{(i)}) - Q_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}; \\ v_{jo}''^{(i)} &= u_j^{2(i)} (C_{1j}^{(i)} + C_{2j}^{(i)}) + v_j^{2(i)} (C_{3j}^{(i)} + C_{4j}^{(i)}), \\ v_{jo}'''^{(i)} &= -u_j^{3(i)} (C_{1j}^{(i)} - C_{2j}^{(i)}) - v_j^{3(i)} (C_{3j}^{(i)} - C_{4j}^{(i)}), \\ y_{jo}^{IV(i)} &= u_j^{4(i)} (C_{1j}^{(i)} + C_{2j}^{(i)}) + v_j^{4(i)} (C_{3j}^{(i)} + C_{4j}^{(i)}), \end{aligned} \tag{9}$$

где $u_j^{(i)} = k_{1j}^{(i)} \ln(e)$, $v_j^{(i)} = k_{2j}^{(i)} \ln(e)$.

Решая систему (9), получаем

$$\begin{aligned} \overline{C}_{1j}^{(i)} &= \frac{v_j^{2(i)} (u_j^{(i)} v_{jo}^{(i)} + v_{jo}'^{(i)} - u_j^{(i)} M_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}) + u_j^2 v_{jo}''^{(i)} + v_{jo}'''^{(i)}}{2u_j^{(i)} (v_j^{2(i)} - u_j^{2(i)})}, \\ \overline{C}_{2j}^{(i)} &= \frac{v_j^{2(i)} (u_j^{(i)} v_{jo}^{(i)} + v_{jo}'^{(i)} - u_j^{(i)} M_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)} + Q_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}) - u_j^{(i)} v_{jo}''^{(i)} - v_{jo}'''^{(i)}}{2u_j^{(i)} (v_j^{2(i)} - u_j^{2(i)})}, \\ \overline{C}_{3j}^{(i)} &= \frac{u_j^{2(i)} (v_j^{(i)} v_{jo}^{(i)} + v_{jo}'^{(i)} - v_j^{(i)} M_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}) + v_j^{(i)} v_{jo}''^{(i)} + v_{jo}'''^{(i)}}{2v_j^{(i)} (v_j^{2(i)} - u_j^{2(i)})}, \\ \overline{C}_{4j}^{(i)} &= \frac{u_j^{2(i)} (v_j^{(i)} v_{jo}^{(i)} + v_{jo}'^{(i)} - v_j^{(i)} M_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)} + Q_{jo}^{(i)} / N_j^{(i)}) - v_j^{(i)} v_{jo}''^{(i)} - v_{jo}'''^{(i)}}{2v_j^{(i)} (v_j^{2(i)} - u_j^{2(i)})}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получаем систему линейных уравнений, которая в матричной форме будет иметь вид

$$\mathbf{AZ} + \mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

где **A** – квадратная матрица коэффициентов при неизвестных в системе уравнений; **Z** – вектор неизвестных усилий; **B** – вектор свободных членов системы уравнений.

При повороте на угол $\varphi = 1$ дополнительной моментной связи в узле $(j + 1)$ j-го участка стержня рамы вектор **B** будет включать следующие элементы

$$\mathbf{B} = [0, \varphi, 0], \tag{12}$$

а вектор

$$\mathbf{Z} = [M_{jo}^{(i)}, Q_{jo}^{(i)}, \tau_{jo}^{(i)}]. \tag{13}$$

При этом граничные условия для концов защемленного j-го участка стержня рамы (в случае свободно сдвигающихся торцов) будут иметь вид

$$\begin{gathered} v_{jo}^{(i)} = 0, \; v_{jo}'^{(i)} = 0, \; v_{jo}''^{(i)} = M_{jo}^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)}, \\ v_{jo}'''^{(i)} = (\tau_{jo}^{(i)} c - Q_{jo}^{(i)}) / C_{xj}^{equ(i)}, \; T_{jo}^{(i)} = 0, \\ v_{j,lj}^{(i)} = 0, \; v_{j,lj}'^{(i)} = \phi, \\ v_{jl}''^{(i)} = (M_{jo}^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} l_j) / C_{xj}^{equ(i)}, \; T_{jl}^{(i)} = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где $T_{jo}^{(i)}$ и $T_{lj}^{(i)}$ – суммарные сдвигающие усилия в шве j-го участка составного стержня рамы по его концам; $\tau_{jo}^{(i)}$ – погонное сдвигающее усилие в связях сдвига в j-м узле j-го участка составного стержня рамы.

С учетом (11) и (14) уравнения (9) дают систему линейных алгебраических уравнений типа (12), в которой матрица **A** будет включать нижеследующие элементы

$$\begin{gathered} A_{11j}^{(i)} = (-V_{1j}^{(i)} e_{1j}^{(i)} + U_{1j}^{(i)} e_{2j}^{(i)}) / w_j^{(i)} + 1 / N_j^{(i)}, \\ A_{12j}^{(i)} = (-V_{1j}^{(i)} u_j^{-1(i)} e_{1j}^{(i)} + U_{1j}^{(i)} v_j^{-1(i)} e_{2j}^{(i)}) / w_j^{(i)} - l_j / N_j^{(i)}, \\ A_{13j}^{(i)} = c(u_j^{-1(i)} e_{3j}^{(i)} - v_j^{-1(i)} e_{4j}^{(i)}) / C_{xj}^{equ(i)} w_j^{(i)}, \end{gathered}$$

$$A_{21j}^{(i)} = (V_{1j}^{(i)} u_j^{(i)} e_{3j}^{(i)} - U_{1j}^{(i)} v_j^{(i)} e_{2j}^{(i)}) / w_j^{(i)},$$

$$A_{22j}^{(i)} = (V_{1j}^{(i)} e_{1j}^{(i)} - U_{1j}^{(i)} e_{2j}^{(i)}) / w_j^{0i} - 1 / N_j^{(i)},$$

$$A_{23j}^{(i)} = -c(e_{1j}^{(i)} - e_{2j}^{(i)}) / C_{xj}^{equ(i)} w_j^{(i)} / N_j^{(i)},$$

$$A_{31j}^{(i)} = (-V_{1j}^{(i)} u_j^{2(i)} e_{3j}^{(i)} - U_{1j}^{(i)} v_j^{2(i)} e_{4j}^{(i)}) / w_j^{(i)} - 1 / C_{xj}^{equ(i)}, \qquad (15)$$

$$A_{32j}^{(i)} = (-V_{1j}^{(i)} u_j^{(i)} e_{3j}^{(i)} - U_{1j}^{(i)} v_j^{(i)} e_{4j}^{(i)}) / w_l^{(i)} + l_j / C_{xj}^{equ(i)},$$

$$A_{33j}^{(i)} = c(u_j^{(i)} e_{3j}^{(i)} - v_j^{(i)} e_{4j}^{(i)}) / C_{xj}^{equ(i)} w_j^{(i)} / N_j^{(i)},$$

где

$$V_{1j}^{(i)} = v_j^2 + N_j^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)}, \; U_{1j}^{(i)} = u_j^2 + N_j^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)},$$

$$e_{1j}^{(i)} = e^{(-k_{1j}^{(i)} l_j)} + e^{(k_{1j}^{(i)} l_j)}, \; e_{2j}^{(i)} = e^{(-k_{2j}^{(i)} l_j)} + e^{(k_{2j}^{(i)} l_j)},$$

$$e_{3j}^{(i)} = e^{(-k_{1j}^{(i)} l_j)} - e^{(k_{1j}^{(i)} l_j)}, \; e_{4j}^{(i)} = e^{(-k_{2j}^{(i)} l_j)} - e^{(k_{2j}^{(i)} l_j)}, \qquad (16)$$

$$w_j^{(i)} = 2(v_{1j}^{2(i)} - u_{1j}^{2(i)}) N_j^{(i)}.$$

При линейном перемещении дополнительной связи в узле ($j + 1$) при ($z_j = l_j$) на величину $\delta = 1$ перпендикулярно оси j-го участка стержня рамы будут справедливы следующие граничные условия (в случае свободно сдвигающихся торцов этого участка стержня рамы):

$$v_{jo}^{(i)} = 0, \; v_{jo}'^{(i)} = 0, \; v_{jo}''^{(i)} = M_{jo}^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)},$$

$$v_{jo}'''^{(i)} = (\tau_{jo}^{(i)} c - Q_{jo}^{(i)}) / C_{xj}^{equ(i)}, \; T_{jo}^{(i)} = 0,$$

$$v_{j,lj}^{(i)} = \delta, \; v_{j,lj}'^{(i)} = 0, \qquad (17)$$

$$v_{j,lj}''^{(i)} = (M_{jo}^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} l_j - N_j^{(i)} \delta) / C_{xj}^{equ(i)}, \; T_{j,lj}^{(i)} = 0.$$

Определение реакций в дополнительных связях осуществляется аналогично вышеизложенному для случая поворота дополнительной связи с координатой $z_j = l_j$ на угол $\varphi = 1$.

Если j-й участок составной стержня рамы при $z_j = l_j$ шарнирно оперт, то при повороте дополнительной моментной связи в j-м узле на угол $\varphi = 1$ граничные условия (в случае свободно сдвигающихся торцов стержня) будут иметь вид

$$v_{jo}^{(i)} = 0, v_{jo}'^{(i)} = \phi, v_{jo}''^{(i)} = M_{jo}^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)},$$

$$v_{jo}'''^{(i)} = (\tau_{jo}^{(i)} c - Q_{jo}^{(i)} - N_j^{(i)} \phi) / C_{xj}^{equ(i)}, T_{jo}^{(i)} = 0, \qquad (18)$$

$$v_{j,l_j}^{(i)} = 0, v_{j,lj}''^{(i)} = 0, T_{j,lj}^{(i)} = 0.$$

При линейном перемещении дополнительной связи в узле ($j + 1$) при ($z_j = l_j$) на $\delta = 1$ перпендикулярно оси j-го участка стержня, шарнирно опертого при $z_j = l_j$, граничные условия (в случае свободно сдвигающихся торцов этого стержня) будут

$$v_{jo}^{(i)} = 0, \; v_{jo}'^{(i)} = 0, \; v_{jo}''^{(i)} = M_{jo}^{(i)} / C_{xj}^{equ(i)},$$

$$v_{jo}'''^{(i)} = (\tau_{jo}^{(i)} c - Q_{jo}^{(i)}) / C_{xj}^{equ(i)}, \; T_{jo}^{(i)} = 0, \qquad (19)$$

$$v_{j,lj}^{(i)} = \delta, \; v_{j,lj}''^{(i)} = 0, \; T_{j,lj}^{(i)} = 0.$$

С учетом (18) и (19) решается система уравнений (9) аналогично тому, как это было показано для j-го участка составного стержня с жестко защемленными концами.

Перемещения узлов стержня рамы $Z_{1j}^{(i)}$ и $Z_{2j}^{(i)}$ определяются из совместного решения уравнений

$$\sum_{r=1}^{m} (R_{1j1r}^{(i)} Z_{1r}^{(i)} + R_{1j2r}^{(i)} Z_{2r}^{(i)}) + R_{1jp}^{(i)} + R_{1j\delta_o}^{(i)} + R_{1j\phi_o}^{(i)} = 0, \qquad (20)$$

$$\sum_{r=1}^{m} (R_{2j1r}^{(i)} Z_{1r}^{(i)} + R_{2j2r}^{(i)} Z_{2r}^{(i)}) + R_{2jp}^{(i)} + R_{2j\delta_o}^{(i)} + R_{2j\phi_o}^{(i)} = 0, \qquad (21)$$

где $R_{1j1r}^{(i)}$ и $R_{1j2r}^{(i)}$ – реакции в связях $1j$ основной системы метода деформаций от единичного перемещения связей $1r$ и $2r$, определенные с учетом влияния продольных сил на i-м шаге нагружения; $R_{2j1r}^{(i)}$ и $R_{2j2r}^{(i)}$ – то же, но в связях $2j$; $R_{1jp}^{(i)}$ и $R_{2jp}^{(i)}$ – реакции в связях $1j$ и $2j$ от внешней нагрузки на i-м шаге нагружения, определенные с учетом влияния продольных сил на i-м шаге нагружения; $R_{1j\delta_o}^{(i)}$ и $R_{2j\delta_o}^{(i)}$ – реакции в связях $1j$ и $2j$ от поступательного смещения опор на i-м шаге нагружения, определенные с учетом влияния продольных сил на i-м шаге нагружения; $R_{1j\phi_o}^{(i)}$ и $R_{2j\phi_o}^{(i)}$ – реакции в связях $1j$ и $2j$ от углового смещения опор на i-м шаге нагружения, определенные с учетом влияния продольных сил на i-м шаге нагружения; m – число узлов с введенными дополнительными связями.

Найденные усилия на опорах j-го стержня при $\varphi = 1$ и $\delta = 1$ далее используются как реакции в связях $R_{1j1r}^{(i)}$, $R_{1j2r}^{(i)}$, $R_{2j1r}^{(i)}$ и $R_{2j2r}^{(i)}$ в уравнениях (20) и (21).

Деформационный расчет рамы осуществляется с использованием эквивалентного модуля деформаций $E_{j\upsilon}^{equ(i)}$, величина которого вычисляется на каждом следующем шаге расчета по результатам, полученным на предыдущем шаге расчета [3]. Значения параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние рамной системы, найденные на i-м шаге нагружения, могут быть в дальнейшем использованы для проверки устойчивости сжато-изогнутых рам методом профессора Р. С. Санжаровского [5].

* Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 61–73.
2. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 314 с.
3. Рочев А. А. Алгоритм нелинейного расчета круговой составной арки // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2010. № 2 (107). С. 25–29.
4. Рочев А. А. Нелинейная теория расчета сквозных упругопластических статически неопределимых рамных систем // Доклады 58-й конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета: В 3 ч. Ч. 1. СПб.: СПбГАСУ, 2001. С. 93–94.
5. Санжаровский Р. С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 280 с.

Rochev A. A., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

CALCULATION OF PLANE FRAMES OF INELASTIC CONSTITUENTS

Calculation of the plane frame systems' deformation is considered. Under non-linear load, translational and angular misalignment of the frames is obtained. Elements of the frames are inelastic component rods with variable cross sections and variable stiffness along the length of their shear ties. The solution is based on A. R. Rzhanitsina's theory of elastic composite bars. Statically indeterminate frame is disclosed by the method of deformation. Stiffness of constituent elements is determined by the expression determining the equivalent of deformation coefficient, which was previously obtained by the author. The expression takes into account compressibility of the branches, shear deformation of the branches' material, development of inelastic deformation in them.

Key words: flat frame, inelastic composite rods, the strain calculation, the equivalent deformation module

REFERENCES

1. Birger I. A. Common algorithms for solving problems in the theory of elasticity, plasticity and creep [Obshchie algoritmy resheniya zadach teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti]. *Uspekhi mekhaniki deformiruemykh sred*. Moscow, Nauka Publ., 1975. P. 61–73.
2. Rzhanitzin A. R. *Sostavnye sterzhni i plastinki* [Composite rods and plates]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1986. 314 p.
3. Rochev A. A. Algorithm for non-linear analysis of circular composite arch [Algoritm nelineynogo rascheta krugovoy sostavnoy arki]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. "Estestvennye i tekhnicheskie nauki"* [Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser. "Natural and engineering sciences"]. 2010. № 2 (107). P. 25–29.
4. Rochev A. A. Nonlinear theory of elastic through calculation of statically indeterminate frame systems [Nelineynaya teoriya rascheta skvoznykh uprugoplasticheskikh neopredelimykh ramnykh sistem]. *Doklady 58-y konferentsii professorov, prepodavateley, nauchnykh rabotnikov, inzhenerov i aspirantov universiteta* [Proceedings of the 58th Conference of professors, teachers, researchers, engineers and graduate students]. In 3. Part 1. St. Petersburg, 2001. P. 93–94.
5. Sanzharovskiy R. S. *Ustoychivost' elementov stroitel'nykh konstruktsiy pri polzuchesti* [Stability of structural elements under creep]. Leningrad, LGU Publ., 1984. 280 p.

Поступила в редакцию 08.11.2013