Март, № 2 **Физико-математические науки** **2014**

УДК 681.5

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ КАМАЧКИН
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики факультета прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Российская Федерация)
akamachkin@mail.ru

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ ОДНОГО КЛАССА РЕЛЕЙНЫХ СВОБОДНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Изучается окрестность кусочно-гладкого решения системы автоматического управления с релейным гистерезисом в контуре обратной связи. Получены достаточные условия трансверсальности траекторий, изолированности периодических решений и орбитальной устойчивости периодических решений.

Ключевые слова: периодическое решение, трансверсальность траектории, орбитальная устойчивость

ВВЕДЕНИЕ

Системы автоматического управления, содержащие релейный гистерезис в контуре обратной связи, известны давно и широко используются в настоящее время [8], [9]. Они исследовались как приближенными, так и аналитическими методами, но до сих пор многие вопросы динамики таких систем далеки от своего решения. В частности, не решен вопрос о разбиении пространства параметров этих систем на области различного динамического поведения. Продвижению в направлении решения этого вопроса аналитическими методами и посвящена данная работа.

Рассмотрим систему автоматического управления

$$\dot{X} = AX + Bu\,, \tag{1}$$

где $u = f(\sigma)$, $\sigma = (\Gamma, X)$, $X \in E_n$, постоянные векторы $B, \Gamma \in E_n$; A – (nxn) – постоянная вещественная матрица; (Γ, X) – скалярное произведение векторов X и Γ ($\Gamma \neq 0$); $f(\sigma)$ – нелинейная неоднозначная функция, характеризующая нелинейный элемент систем:

$$f(\sigma) = \begin{cases} m_1 & \text{при } -\infty < \sigma < \ell_2, \\ m_2 & \text{при } \ell_1 < \sigma < +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

где $m_1 < 0 < m_2$, $\ell_1 < 0 < \ell_2$. Гистерезисная нелинейность релейного типа (2) вводится при математическом описании систем автоматического управления, если имеет место пространственное запаздывание управляющих механизмов. На плоскости (f, σ) гистерезисная петля обходится против часовой стрелки. Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части (Re $\lambda i < 0$), $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены условия:

$$-\left(\Gamma, A^{-1}Bm_1\right) > \ell_2,\; -\left(\Gamma, A^{-1}Bm_2\right) < \ell_1. \tag{3}$$

Любая траектория системы (1), (2) состоит из кусков траекторий системы вида

$$\dot{X} = AX + m_i B \quad (i = 1,\ 2). \tag{4}$$

В фазовом пространстве точки «сшивания» этих кусков принадлежат поверхностям переключения $(\Gamma, X) = \ell_i$ $(i = 1,2)$, и, в частности, периодический режим может состоять из двух кусков траекторий в силу разных систем (4) (так называемая унимодальная периодическая орбита).

ОКРЕСТНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

Обозначим M орбиту периодического режима в фазовом пространстве.

Решение системы (1), (2) – вектор-функция $X(t, X_0, m_i)$, заданная и непрерывная при t ≥ 0, $X(0, X_0, m_i) = X_0$. Если $(\Gamma, X_0) = \ell_1$, то эта вектор-функция удовлетворяет равенству $X_0 = X(\omega, X_0, m_i)$, где $X_0 \in M$, ω – период решения соответствующего M, $\omega = t_1 + t_2$ (t_1 – время, соответствующее движению от одной гиперплоскости переключения до другой в силу (4) при $i = 1$, а t_2 – время при $i = 2$). Функция $X(t, X_0, m_i)$ – дифференцируемая по t для всех $t \in (0, t_1)$ и всех $t \in (t_1, t_1 + t_2)$, поэтому в окрестности всей орбиты M невозможно рассматривать приведенную систему [1] системы (1), (2). Действительно, построим гиперплоскость P_t, проходящую через $X(t, X_0, m_i)$ при фиксированном t и определяемую уравнением

$$\left(X - X(t, X_0, m_i), \dot{X}(t, X_0, m_i)\right) = 0\,, \tag{5}$$

где $X \in E_n$. Гиперплоскость является нормальной гиперплоскостью к кривой, определяемой $X(t, X_0, m_i)$, при данном фиксированном t. На P_t можно ввести систему координат, выбрав в качестве ее начала точку $X(t, X_0, m_i)$, а в качестве единичных ортов осей – попарно ортогональные и непрерывно дифференцируемые векторы. Таким образом, переходим к исследованию окрестности траектории методами теории устойчивости [2]. В силу условий, наложенных на матрицу A, можно утверждать, что любая траектория $X(t,\ X_0,\ m_i)$ в силу системы (4) является асимптотически орбитально устойчивой. Именно из кусков этих траекторий составлена периодическая орбита M. Обозначим эти куски $M(X_0,\ m_1)$ и $M(X_0,\ m_2)$. Обозначим $\rho(X,M)=\inf\limits_{Y\in M}\|X-Y\|$, $S(M,\ \varepsilon)=\{X\colon X\in E_n,\ \rho(X,\ M)<\varepsilon\}$, $S(M,\ \varepsilon)$ – ε – окрестность траектории, $\varepsilon>0$. Очевидно, что в точках переключения периодического режима воспользоваться изложенной методикой нельзя.

По аналогии с непрерывным случаем решение $X(t,\ X_0,\ m_i)$, которое соответствует орбите M, будем называть орбитально устойчивым, если для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $\bar{X}\in S\left(M\left(X_0,m_i\right),\delta\right)$ при $t\geq 0$ будем иметь $X\left(t,\bar{X},m_i\right)\in S\left(M\left(X_0,m_i\right),\varepsilon\right)$.

Обозначим через X_0^1 и X_0^2 точки переключения периодического режима и $\left(\Gamma,X_0^1\right)=\ell_1$, $\left(\Gamma,X_0^2\right)=\ell_2$. Ясно, что строить гиперплоскости P_t для исследования окрестности можно до тех пор, пока множество $S_p=S(M(X_0,\ m_i),\ \delta)\cap P_t$ имеет не более одной общей точки с $\left(\Gamma,X\right)=\ell_i$. Обозначим S_p' множество, имеющее одну общую точку с $\left(\Gamma,X\right)=\ell_i$. При этом можно считать, в силу вида системы (1), (2), что между S_p' и соответствующей гиперплоскостью $\left(\Gamma,X\right)=\ell_i$ точки, принадлежащие периодическому режиму, могут быть представлены так:

$$X=X_0^j+t\left(AX_0^j+m_iB\right)+o\left(|t|\right),\ \ j=1,\ 2,$$

где t принадлежит некоторой достаточно малой окрестности точки $t=0$. Тогда, если выполняются в точках переключения следующие неравенства:

$$\begin{aligned}Q_1&=\frac{\left|\Gamma^T\left(AX_0^2+m_1B\right)\right|}{\|\Gamma\|\left\|AX_0^2+m_1B\right\|}\geq\frac{\left|\Gamma^T\left(AX_0^2+m_2B\right)\right|}{\|\Gamma\|\left\|AX_0^2+m_2B\right\|}=Q_2,\\ N_1&=\frac{\left|\Gamma^T\left(AX_0^1+m_2B\right)\right|}{\|\Gamma\|\left\|AX_0^1+m_2B\right\|}\geq\frac{\left|\Gamma^T\left(AX_0^1+m_1B\right)\right|}{\|\Gamma\|\left\|AX_0^1+m_1B\right\|}=N_2,\end{aligned}\tag{6}$$

то периодический режим (или, иначе, орбита M) соответствует орбитально устойчивому решению системы (1), (2).

Условия (6) имеют прозрачный геометрический смысл, но в общем случае могут и не выполняться.

Пусть неравенства (6) не выполняются. Воспользуемся тем, что в окрестностях типа $S(M(X_0,\ m_i),\ \delta)$ вдоль траекторий $M(X_0,\ m_1)$ и $M(X_0,\ m_2)$ имеет место сжатие в плоскостях типа P_t. Обозначим в равенстве (5) $Z=X-X(t,X_0,m_i)$. Рассмотрим матричное уравнение $A^TV+VA=-W$, где V и W – постоянные симметрические матрицы, при этом $V(Z)=Z^TVZ$ и $W(Z)=-Z^TWZ$ – соответственно положительно определенная и отрицательно определенная формы.

Обозначим $a=\min\limits_k\lambda_k(V)$, $a_1=\max\limits_k\lambda_k(V)$ и $b=\min\limits_k\lambda_k(W)$, $b_1=\max\limits_k\lambda_k(W)$, тогда в силу условий, наложенных на A, имеем $0<a<a_1$, $0<b<b_1$. Используя неравенство (6) и свойство экспоненциального сжатия вдоль траекторий, получаем, что для орбитальной устойчивости периодической траектории M должно выполняться неравенство

$$\|Z_0\|\geq\frac{a_1}{a}e^{-\alpha\omega}N_1N_2Q_1Q_2\|Z_0\|,$$

где $\alpha=b2\left(a_1\right)^{-1}$, Z_0 – начальный вектор в некоторой нормальной гиперплоскости, содержащей множество вида S_p', то есть Z_0 лежит в этом множестве. Таким образом, должно выполняться неравенство:

$$a_1a^{-1}e^{-\alpha\omega}N_1N_2Q_1Q_2\leq 1.\tag{7}$$

Предложение 1. Если у системы (1), (2) все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, $(\Gamma,\ B)\neq 0$ и выполняются неравенства (3), (6) или (3), (7), то периодический режим с двумя точками переключения является орбитально устойчивым периодическим решением системы (1), (2).

Отметим, что числа a, a_1, b, b_1 находятся не однозначно и зависят, например, от выбора матрицы W. Кроме того, как правило, легче проверить выполнение неравенства (6) в некоторых множествах, содержащих точки переключения и непрерывно отображаемых в себя в силу решения системы (1), (2). Взяв в одном из этих множеств начальное приближение точки переключения, можно получить в силу системы (1), (2) итерационный процесс, сходящийся к этой точке. Поэтому надо проверять неравенства (6) в некоторых окрестностях точек X_0^1 и X_0^2. Из приведенных рассуждений следует, что мы рассматриваем изолированную периодическую траекторию, в окрестностях точек переключения которой траектории системы (4) не касаются, по крайней мере, одновременно гиперплоскостей переключения $\left(\Gamma,X\right)=\ell_i$ $\left(i=1,\ 2\right)$.

ИЗОЛИРОВАННОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

Обсудим условия изолированности орбит и свойство трансверсальности, то есть когда траектории системы, например вида (4), не касаются гиперплоскостей переключения. Условия касания траекториями поверхностей переключения: $\Gamma^T(AX+m_iB)=0$, $i=1,\ 2$, откуда получаем:

$$\Gamma^TAX=-\Gamma^Tm_iB,\ i=1,\ 2.\tag{8}$$

Уравнение (8) – это уравнение гиперплоскости. Если $\Gamma^TB\neq 0$, то в точках X на

$(\Gamma, X) = \ell_i \;\; (i = 1, 2)$ нет одновременного касания в силу обеих систем (4), если $m_1 \neq m_2$. Таким образом, получаем уравнения прямых, лежащих на $(\Gamma, X) = \ell_i \;\; (i = 1, 2)$ и таких, что в точках этих прямых выполняется условие (8), то есть:

$$\begin{cases} \Gamma^T X = \ell_j \quad (j = 1, 2), \\ \Gamma^T A X = -\Gamma^T B m_i \quad (i = 1, 2), \;\; \Gamma^T B \neq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, точки переключения орбиты не должны принадлежать прямым (9) – это условие трансверсальности для системы (1), (2).

С геометрической точки зрения не должны касаться поверхностей переключения траектории в силу уравнения (4), приходящие в окрестность точки переключения орбиты M, так как если в этом случае уходящие из окрестности траектории касаются, то при переходе через точку переключения имеет место сжатие по отношению к изучаемой траектории M. Если наоборот, то имеет место удаление от изучаемой траектории M при рассмотрении изображающих точек в нормальных плоскостях P_t. Это поясняет смысл неравенства (6).

Отметим, что условия (9) легко проверить, если знаем, хотя бы приближенно, координаты точек переключения M.

Условия изолированности орбиты тесно связаны с проблемой существования периодического решения системы (1) не только с функцией вида (2), но и с более сложными неоднозначными функциями $f(\sigma)$.

Периодические стационарные колебания можно построить, если найти все периодические решения интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \Gamma^T e^{At} \left(E - e^{A\omega}\right)^{-1} \int_0^{\omega} e^{A(\omega-\tau)} B f\left(\sigma(\tau)\right) d\tau + \\ + \Gamma^T \int_0^{t} e^{A(t-\tau)} B f\left(\sigma(\tau)\right) d\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

где ω – период искомого периодического решения. Из уравнения (10) следует находить функцию $\sigma(t)$ и ее период ω. В (10) функция $f(\sigma(t))$ имеет кусочно-постоянные значения, зависящие от положения текущей координаты $X(t)$ в E_n. Матрица $(E - e^{A\omega})$ должна быть неособой, то есть среди собственных чисел матрицы A нет чисто мнимых вида pi, где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тогда уравнение (6) имеет единственное решение [2]. В работе [9] утверждается, что для того, чтобы унимодальная периодическая орбита, то есть с двумя точками переключения, с полупериодом T_0 была изолированной, необходимо и достаточно, чтобы (в обозначениях оригинала [9])

$$N\left(e^{AT_o} - E\right) \cap N(\Gamma) = \{0\}, \tag{11}$$

где N обозначает нуль-пространство соответствующей матрицы. Более того, существует континуум периодических орбит, когда (11) не выполняется. Этот результат появился посредством уточнения работы [5], из условия существования отображения плоскости в плоскость и условия, что неподвижные точки этого отображения являются изолированными. Множество $N(\Gamma)$ – это множество тех X, для которых $\Gamma^T X = 0$, то есть это уравнение гиперплоскости, переходящей через точку O_n, и аналогично множество $N\left(e^{AT_o} - E\right)$ – это множество тех X, для которых $\left[e^{AT_o} - E\right] X = O_n$.

Условие (11) выполняется, если уравнение $\left[e^{AT_o} - E\right] X = O_n$ имеет только тривиальное решение, а это происходит только тогда, когда $rang\left[e^{AT_o} - E\right] = n$, то есть когда матрица $\left[e^{AT_o} - E\right]$ – неособая.

Следовательно, условие (11) не накладывает никаких новых условий на матрицу A по сравнению с ранее известными условиями. Кроме того, условие (11) получено лишь для симметричного случая гистерезиса при $m_1 = -1$, $m_2 = 1$, $\ell_1 = -1$, $\ell_2 = 1$. При этом известны достаточные условия сведения системы (1), (2) к симметричной системе [3].

Таким образом, для общего случая системы (1), (2) справедливо

Предложение 2. Если система (1), (2) имеет периодическую орбиту M с периодом ω и точки переключения этой орбиты не принадлежат множеству, определяемому условиями (9), матрица $\left[E - e^{A\omega}\right]$ – неособая, то тогда периодическая орбита M является изолированной.

Пример. Рассмотрим систему вида (1), (2), где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \; \begin{matrix} \ell_1 = -1, & \ell_2 = 1, \\ m_1 = -1, & m_2 = 1. \end{matrix}$$

При этом $\lambda_{1,2} = -1 \pm 10i$, $\lambda_3 = -1$, то есть все $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, и выполняется условие (3). Эта система имеет две унимодальные периодические орбиты. Первая орбита – устойчивая с точками переключения

$$X_0^1 = -X_0^2 \cong \left(0{,}1438 \quad 0{,}0059 \quad 0{,}6752\right)^T,$$

вторая орбита является неустойчивой с точками переключения

$$X_0^1 = -X_0^2 \cong \left(0{,}6469 \quad 0{,}3651 \quad 0{,}2440\right)^T.$$

Легко проверить, что второе равенство (9) не выполняется для этих точек. Обе орбиты являются изолированными.

Замечание. Сформулированные условия нисколько не уже условия изолированности (11), кроме того, Предложение 2 годится не только для унимодальных орбит, а вообще для кусочно-гладких орбит. Например, можно считать, что траектория имеет $2m$ точек переключения ($m \geq 1$ и точек конечное число) и в окрестности каждой из них имеет место свойство трансверсальности (9). При этом должно дополнительно выполняться условие: существует такое $\alpha \in (0, 1)$, что при любом j ($1 \leq j \leq n$) $\max_j \operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq -\alpha < 0$.

ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Предположим, что нам удалось найти точки переключения периодической орбиты, то есть существует замкнутая траектория. Наша задача – исследовать эту траекторию на устойчивость. Каждая часть траектории в силу системы (4) может быть исследована с использованием нормальной плоскости P_t и уравнения Ляпунова, но этот подход не может быть использован в окрестностях точек переключения. Будем далее считать, что выполнены условия Предложения 2.

Пусть X_0 – точка переключения, лежащая на плоскости $(\Gamma, X) = \ell_i$, и пусть угол α_0 между векторами Γ и AX_0 – острый, то есть $(\Gamma, AX_0) > 0$ и $0 < \cos\alpha_0 \leq 1$, где $\cos\alpha_0 = \dfrac{(\Gamma, AX_0)}{\|\Gamma\|\|AX_0\|}$. Предположим, что матрица A такова, что для любого вектора C выполняется условие

$$1 \geq \frac{(AC, -C)}{\|AC\|\|C\|} > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) = \sin\alpha_0 . \qquad (12)$$

Последнее условие перепишем так

$$\frac{(AC, -C)}{\|AC\|\|C\|} > \sin\left[\arccos\frac{(\Gamma, AX_0)}{\|\Gamma\|\|AX_0\|}\right]. \qquad (12)$$

Пусть для наглядности $n = 3$ и пусть точка X_1 принадлежит произвольной траектории, плоскости P_t и одновременно поверхности переключения, тогда вектор $(X_1 - X_0)$ лежит в плоскости $(\Gamma, X) = \ell_i$. Построим систему ортов: $\Gamma_1 = \dfrac{\Gamma}{\|\Gamma\|}$, $\Gamma_2 = \dfrac{Пр\, AX_0}{\|Пр\, AX_0\|}$, где $Пр\ AX_0$ – проекция вектора AX_0 на плоскость $(\Gamma, X) = \ell_i$, а орт Γ_3 выбирается так, чтобы он имел острый угол с вектором $(X_1 - X_0)$. Построим матрицу $V = \sum_{k=1}^{3} V_k$, где $V_k = \Gamma_k \Gamma_k^T$. Обозначим X переменную точку исследуемой траектории между плоскостью P_t и точкой X_0. Рассмотрим функцию

$$\bar{V}(X) = (X - X_1)^T V (X - X_1) =$$
$$= \Delta X^T V \Delta X = \sum_{k=1}^{3} \Delta X^T V_k \Delta X = \sum_{k=1}^{3} \bar{V}_k(X).$$

Точка X_1 рассматривается как «неподвижная», то есть X_1 не зависит от t. Тогда $\dot{\bar{V}}(X) = X^T A^T V \Delta X + \Delta X^T V A \Delta X$. Матрица $V_1 = \Gamma\Gamma^T$, поэтому

$$\dot{\bar{V}}_1(X) = X^T A^T V_1 \Delta X + \Delta X^T V_1 A \Delta X \leq 0, \qquad (13)$$

в силу того, что по условию трансверсальности $(\dot{X}, \Gamma) \geq 0$, а $(\Gamma, \Delta X) \geq 0$.

Выясним теперь знак $\dot{\bar{V}}_2(X)$, то есть покажем, что

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}_2(X) &= X^T A^T V_2 \Delta X + \Delta X^T V_2 A X = \\ &= X^T A^T \Gamma_2 \Gamma_2^T \Delta X + \Delta X^T \Gamma_2 \Gamma_2^T A X \leq 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Рассмотрим взаимное расположение векторов, входящих в выражение (14). Знак $(\Gamma_2, \Delta X)$ может быть любым, то есть $(\Gamma_2, \Delta X) \leq 0$ или $(\Gamma_2, \Delta X) \leq 0$. Выполняется условие $AX \to AX_0$ при $X \to X_0$, обозначаем $\alpha(t)$ угол между вектором $(X_1 - X)$ и плоскостью переключения, тогда выполняется условие $\alpha(t) \leq \angle(AX_0, \Gamma) = \alpha_0$, то есть угол α_0 – это угол максимального отклонения вектора $(X_1 - X)$ от $(\Gamma, X) = \ell_i$, $\alpha(t) \to 0$ при $X \to X_0$. Пусть при этом выполняется условие (12) при $C = \Gamma_2$, тогда величина (AX, Γ_2) всегда имеет знак, противоположный знаку $(\Gamma_2, \Delta X)$, следовательно, выполняется неравенство (14).

Из аналогичных соображений при $C = \Gamma_3$ следует, что

$$\dot{\bar{V}}_3(X) \leq 0 . \qquad (15)$$

Если при движении плоскости вида P_t первой достигает поверхности переключения точка $X = X_0$, то тогда все аналогично с переобозначением $X_1 = X_0$. Здесь для геометрической наглядности рассмотрен случай $n = 3$, но все можно перенести на случай $n > 3$. Из неравенств (13), (14) и (15) следует, что $\dot{\bar{V}}(X) \leq 0$.

Полученная матрица V по построению – идемпотентная и, следовательно, тождественна единичной матрице. Рассмотрим матрицу $W = A^T V + VA$, где матрица A – матрица нашей системы. Воспользуемся методом, позволяющим получать аддитивные свойства из известных мультипликативных (то есть используем кронекеровскую сумму) [6], и следующим утверждением [4]: для отрицательной определенности матрицы W необходимо выполнение $-Sp\,W > \|W\|_E$ и достаточно, чтобы $-Sp\,W > \sqrt{n-1}\|W\|_E$. Это упрощенный критерий отрицательной определенности матрицы. Последнее неравенство в нашем случае представляется так:

$$Sp^2 A > \frac{1}{2 + (n+1)} Sp\left(AA^T\right). \qquad (16)$$

Условие (16) позволяет построить функцию Ляпунова для тех участков траектории, где расстояние измеряется в плоскостях вида P_t, и в целом позволяет построить функцию Ляпунова вдоль всей кусочно-гладкой замкнутой траектории.

В результате наших рассмотрений сформулируем

Предложение 3. Пусть выполнены все условия Предложения 2 относительно системы (1), (2), все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены условия (3), условие (12) для каждой точки переключения периодической орбиты и условие (16), тогда периодический режим является орбитально устойчивым периодическим решением системы (1), (2).

Отметим, что условие (12) можно рассматривать как дополнительное к свойству трансверсальности, а свойство (16) – как дополнительное условие на собственные числа матрицы A.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получены достаточные условия существования изолированных периодических решений системы (1), (2), условие трансверсальности траекторий по отношению к поверхностям переключений, а также еще один вариант достаточных условий того, что периодическое решение является орбитально устойчивым. Если возможно перейти к дискретному анализу системы (1), (2), то проблемы, рассмотренные в статье, не возникают [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. З у б о в В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962. 631 с.
3. К а м е н с к а я С. А. Анализ и стабилизация систем с релейным гистерезисным управлением: Автореф. дисс. … канд. техн. наук. СПб., 2006. 21 с.
4. М и х е е в С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. 60 с.
5. A s t r o m K. J. et al. Recent advances in relay feedback methods – a survey // Proc. IEEE Conf. Systems, Man and Cybernetics. 1995. Vol. 3. P. 2616–2621.
6. B e l l m a n R. Introduction to matrix analysis. McGraw – Hill Book Comp., Inc., 1960. 368 p.
7. K a m a c k i n A. M., S t e p a n o v A. V. Stable periodic solutions of time delay systems containing hysteresis nonlinearities. Topics in Time-Delay Systems: Analysis, Algorithms and control // Springer series Lecture Notes in Control and Information Science. 2009. P. 121–133.
8. M a c k i W., N i s t r i P., Z e c c a P. Matchematical models for hysteresis // SIAM Rev. 1993. Vol. 35. № 1. P. 94–123.
9. V a r i g a n d a S., G e o r g i o u T. T. Dynamycs of Relay Relaxation Oscillators // IEEE Transactions on automatic control. 2001. Vol. 46. № 1. P. 46–77.

Kamachkin A. M., Saint Peterburg State University (Saint Petersburg, Russian Federation)

PERIODIC ORBITS OF SAME CLASS RELAY RELAXATION OSCILLATORS

A neighborhood of piecewise-smooth solution of the automatic control system with relay hysteresis in feedback circuit is considered. Sufficient conditions of transversality of trajectories, isolation, and orbit stability of periodic solutions are obtained.

Key words: Periodic solution, orbit stability, transversality

REFERENCES

1. D e m i d o v i c h B. P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on mathematical theory of stability]. Moskow, Nauka Publ., 1967. 472 p.
2. Z u b o v V. I. *Kolebaniya v nelineynykh i upravlyaemykh sistemakh* [Oscillations of nonlinear and controllable systems]. St. Petersburg, Sudpromgiz Publ., 1962. 631 p.
3. K a m e n s k a y a S. A. *Analiz i stabilizatsiya sistem s releynym gisterezisnym upravleniem*: *Avtoref. diss. ... kand. tekhn. nauk* [Analysis and stabilization of systems with relay hysteresis control: Author’s summary of Ph. phys. and math. sci. diss.]. St. Petersburg, 2006. 21 p.
4. M i k h e e v S. E. *Mnogomernaya approksimatsiya i interpolyatsiya* [Many-dimensional approximation and interpolation]. St. Petersburg, 2012. 60 p.
5. A s t r o m K. J. et al. Recent advances in relay feedback methods – a survey // Proc. IEEE Conf. Systems, Man and Cybernetics. 1995. Vol. 3. P. 2616–2621.
6. B e l l m a n R. Introduction to matrix analysis. McGraw – Hill Book Comp., Inc., 1960. 368 p.
7. K a m a c k i n A. M., S t e p a n o v A. V. Stable periodic solutions of time delay systems containing hysteresis nonlinearities. Topics in Time-Delay Systems: Analysis, Algorithms and control // Springer series Lecture Notes in Control and Information Science. 2009. P. 121–133.
8. M a c k i W., N i s t r i P., Z e c c a P. Matchematical models for hysteresis // SIAM Rev. 1993. Vol. 35. № 1. P. 94–123.
9. V a r i g a n d a S., G e o r g i o u T. T. Dynamycs of Relay Relaxation Oscillators // IEEE Transactions on automatic control. 2001. Vol. 46. № 1. P. 46–77.

Поступила в редакцию 22.10.2013