

АЛЕКСАНДР РОМОЛДОВИЧ УРБАН

магистр прикладной математики и информатики, программист, Центр ПетрГУ-Метсо Систем Автоматизации, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
alexurban@gmail.com

ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ КУЗНЕЦОВ

доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и кибернетики математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
kuznetsov@psu.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ УЧЕТА СРОКОВ ПРОДУКЦИИ В ЗАДАЧЕ РАСКРОЯ ТАМБУРОВ БУМАГОДЕЛАТЕЛЬНЫХ МАШИН

Представлено описание комплекса математических моделей и методов для решения задачи учета директивных сроков отгрузки продукции при раскрое съёмов тамбуров бумагоделательных машин, направленной на экономное использование и сокращение потерь материальных ресурсов, снижение объема (доли) бракованной продукции, повышение оперативности и качества управления производством.

Ключевые слова: раскрой бумажного полотна, динамическое программирование, линейное программирование

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая задача относится к классу ставших классическими задач раскроя съёмов тамбура бумажного полотна на рулоны требуемых форматов [1]. Она может быть сформулирована как задача поиска множества планов раскроя, обеспечивающего выработку всей продукции в требуемых количествах с наименьшими отходами в форме кромок материала. В рамках исследования предусмотрен расчет оптимальной загрузки оборудования и распределения работ между различными бумагоделательными машинами (БДМ) с учетом плотности, диаметра и качества продукции, объемов выработки и возможных планов раскроя. План раскроя тамбура представляет собой некоторый набор одновременно выкраиваемых форматов. При этом сумма длин рулонов должна быть меньше ширины полотна на величину кромки, определяющую долю потерь. Важной особенностью выполненной разработки является наиболее полный учет ряда производственных и технологических ограничений, в число которых входят требования к качеству и плотности бумаги, определенные радиусы рулонов разных заказов, отклонения объемов поставок, сроки выработки продукции и т. д. [6].

Сложность задачи распределения заказов между БДМ с учетом их спецификаций, производственных возможностей оборудования, размеров тамбура и возможных планов раскроя обусловлена ее комбинаторными особенностями: планирование выработки десятка форматов на 2–4 машинах допускает тысячи вариантов планов раскроя

и еще больше – их комбинаций, обеспечивающих нужные объемы продукции [6].

Известны системы планирования раскроев, выполняющие расчеты с учетом некоторых из перечисленных факторов, в отличие от разработанной авторами системы, которая реализует все перечисленные требования и обеспечивает оптимизацию планов за сравнительно малое время. Так, с использованием методов решения задач планирования производства предприятий лесопромышленного комплекса и целлюлозно-бумажной промышленности преподавателем кафедры прикладной математики и кибернетики математического факультета ПетрГУ Р. В. Вороновым была создана и внедрена программная система планирования производства бумаги. Данная система учитывает большинство требуемых технологических параметров и является достаточно мощным инструментом для составления требуемых планов раскроя [2].

Также необходимо уделить внимание разработкам института растительных полимеров по созданию подобных систем. Конечно, их разработки направлены больше на химико-технологические особенности производства бумаги (например, «Химия мокрой части бумагоделательных машин»), однако у них есть опыт по созданию и внедрению систем оптимизации раскроя бумажного полотна [8].

В основном на предприятиях преобладают самописные программы (во многом на базе Excel) и учетные системы (R3, Ахарт). В данных системах никакой речи об оптимизации не идет, все раскрои делаются «ручкой на листоч-

ке». Редко, но встречаются крупные системы, такие как HoneyWell или Tietoenator, но даже они не учитывают ряд важных ограничений (массовость производства, возможность склейки рулонов и т. д.), также серьезным минусом является сильная ориентированность систем на их оборудование.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим основные характеристики рассматриваемых в задаче объектов: продукции, заказов, бумагоделательных машин и планов раскроя.

Требования к продукции характеризуются следующими параметрами:

- Формат продукции (рулона) (см).
- Диаметр – диапазон (см).
- Минимальный и максимальный объемы (т).
- Стандартная масса (г/м^2).
- Объемная плотность (т/м^3).
- Край/Не край – определяет положение рулона с краю или в середине полотна.
- Список БДМ, на которых может вырабатываться продукция данного заказа.
- Дата (директивный срок) готовности.

Согласно условиям договора заказы определяют объем и номенклатуру необходимой продукции, причем заказ может включать один или несколько форматов. Однако, не умаляя общности, заказу удобно сопоставить один определенный формат, а более сложный, комплексный заказ рассматривать как совокупность элементарных. Многие считают нецелесообразным указание объемов поставки продукции нижней и верхней границами, справедливо полагая, что заказ все равно предстоит выполнить полностью. В связи с этим необходимо отметить, что подобная форма описания заказа полезна не только ввиду возможности определенных отклонений объемов поставки продукции, но и при подборе форматов, полезных для дополнения планов раскроя. Подобным образом можно использовать ходовые форматы или форматы несрочных заказов, полагая нижнюю границу объема заказа равной нулю. Выпуск такой продукции будет запланирован лишь в том случае, когда ее формат удачно дополнит какой-либо из планов раскроя [3], [4].

В рамках модели характеристики бумагоделательных машин таковы:

- Ширина полотна (тамбура) (см).
- Максимальная кромка (максимальное отклонение ширины раскроя от ширины полотна) (см).
- Диаметр гильзы – диаметр цилиндра, на который наматывается бумажное полотно рулона (см).
- Производительность (тонн в сутки).
- Количество ножей продольно-резательной машины.

- Минимальная и максимальная (в %) загрузенности от номинальной производительности.

Перечислим характеристики раскроя:

- Ширина раскроя не должна превосходить ширину тамбура соответствующей БДМ.
- Следует учитывать, что все форматы в составе раскроя характеризуются одинаковой плотностью, одинаковым диаметром.

Управляемые параметры объектов связаны рядом соотношений, регламентирующих работу агрегатов и выпуск продукции:

- В составе планов раскроя могут присутствовать только допустимые виды продукции для данной БДМ.
- Соответствие интенсивностей планов раскроя БДМ ресурсам ее производительности. Допускается планирование работы БДМ с различной производительностью и определение времени ее работы указанием нижней и верхней границ.
- Соответствие объемов производства продукции.

В качестве критерия эффективности выберем согласованные по объемам выработки планы раскроя для каждой бумагоделательной машины, обеспечивающие минимальные отходы для вторичной переработки [5].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Для построения математической модели введем следующие обозначения. В первую очередь определим индексные множества:

N – множество заказов продукции, $i \in N$;
 M – множество бумагоделательных машин, $j \in M$;
 T – множество периодов времени, $t \in T$.
 Определяется на основании множества директивных сроков готовности продукции следующим образом. Пусть $D = \{D_i, i \in N\}$ – множество директивных сроков продукции. Тогда отсортируем и удалим одинаковые элементы из данного множества, получив такую последовательность индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, что $D_{i_1} < D_{i_2} < \dots < D_{i_r}$. На основании этого определим искомое множество периодов времени:

$P = \{[P_0, D_q], q = i_r, t \in T\}$, где P_0 – дата начала планирования;

K – множество способов раскроя бумажного полотна, $k \in K$;

K_j – множество способов раскроя бумажного полотна, выполняемых на бумагоделательной машине с индексом j ;

K_{jt} – множество способов раскроя бумажного полотна, выполняемых на бумагоделательной машине с индексом j в период времени t .

$$K = \bigcup_{j \in M} K_j, K_j = \bigcup_{t \in T} K_{jt}.$$

Введем параметры задачи:

b''_{jt}, B''_{jt} – минимальная и максимальная выработки (в тоннах) бумагоделательной машины

с индексом j в течение периода t с учетом минимальной и максимальной загруженности от номинальной производительности БДМ;
 a_{ik} – доля выработки продукции заказа с индексом i при использовании раскроя с индексом k ;
 e_{jtk} – признак выработки раскроя с индексом k на бумагоделательной машине с индексом j в течение периода t ($e_{jtk} \in \{0, 1\}$);
 p_j – производительность бумагоделательной машины с индексом j ;
 b'_i, B'_i – минимальный и максимальный объемы выработки заказа с индексом i ;
 v_k, V_k – минимальный и максимальный объемы выработки одного наката, соответствующего раскрою с индексом k , с учетом минимального и максимального диаметров;
 c_k – доля потерь полотна при использовании раскроя с индексом k (в виде кромок);
 c'_i, C'_i – оценки убытка предприятия в случае недопоставки и перевыполнения соответственно для заказа с индексом i ;
 c''_{jt}, C''_{jt} – оценки убытка предприятия в случае отклонения от минимальной и максимальной загруженности БДМ соответственно с индексом j в течение периода t ;
 c^z – оценка убытка предприятия в случае невыполнения условия равномерной загрузки бумагоделательных машин.

Введем неизвестные задачи:

f'_i, F'_i – объемы недопоставки и перевыполнения (отклонение объема выработки от минимального и максимального объемов выпуска продукции) для заказа с индексом i ;
 f''_{jt}, F''_{jt} – отклонения от минимальной и максимальной загруженности БДМ с индексом j в течение периода t ;
 x_k – объем выработки раскроя с индексом k ;
 z – ограничивающая переменная, используемая для равномерной загруженности бумагоделательных машин.

Модель имеет вид:

$$\sum_{k \in K} c_k x_k + \sum_{i \in N} (c'_i f'_i + C'_i F'_i) + \sum_{j \in M} \sum_{t \in T} (c''_{jt} f''_{jt} + C''_{jt} F''_{jt}) + c^z z \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$b'_i - f'_i \leq \sum_{k \in K} a_{ik} x_k \leq B'_i + F'_i, \quad i \in N; \quad (2)$$

$$b''_{jt} - f''_{jt} \leq \sum_{k \in K_{jt}} e_{jtk} x_k \leq B''_{jt} + F''_{jt}, \quad j \in M, \quad t \in T; \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K_j} \frac{x_k}{p_j} \leq z, \quad j \in M; \quad (4)$$

$$x_k \in \bigcup_{p \in Z^+} [p \cdot v_k, p \cdot V_k], \quad k \in K; \quad (5)$$

$$x_k \geq 0, \quad k \in K; \quad (5')$$

$$f'_i \geq 0, F'_i \geq 0, f''_{jt} \geq 0, F''_{jt} \geq 0, z \geq 0, \quad (6)$$

$$i \in N, j \in M, t \in T$$

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задачу (1)–(5), (6) назовем основной, ее ослабление (1)–(4), (5'), (6) – вспомогательной задачей линейного программирования. Решение вспомогательной задачи производится посредством алгоритма симплекс-метода. Дальнейшая корректировка решения для соблюдения ограничения (5), соответствующего условию допустимости объемов выработки съёмов при целом количестве накатов, выполняется с помощью авторских методов исследования операций, которым будет посвящена отдельная статья.

Важно отметить, что в приведенной модели учитываются ограничения (3), (4), (5), что является отличительной особенностью данной разработки. Это приводит к существенному росту размерности задачи и необходимости использования специальных методов ее решения. Также стоит сказать о связи ограничений (2) и (3). Для некоторого раскроя с индексом k и бумагоделательной машины с индексом j , на которой данный раскрой выполняется, будет иметь место следующее соотношение:

$$\forall i \in N : a_{ik} > 0, \forall t \in T : e_{jtk} = 1 \Rightarrow D_i \leq D_j, \quad (7)$$

$$k \in K, j \in M.$$

Соотношение (7) определяет учет директивных сроков отгрузки продукции.

Большая размерность матрицы и сложная структура являются важнейшими отличительными особенностями модели, требующими использования алгоритма генерации столбцов. В рамках алгоритма генерации столбцов производится решение задачи линейного раскроя на основе двойственной задачи к (1)–(4), (5'), (6). Именно в ней учитываются основные технологические ограничения (такие как учет максимальной кромок, максимальное количество рулонов в одном раскрое, максимальное количество различных форматов в одном раскрое и т. д.), решение производится посредством методов динамического программирования и используется на каждой итерации симплекс-метода для выбора базисного столбца. Подробное описание решения задачи линейного раскроя для тамбуров бумагоделательных машин будет представлено в следующей статье.

Перечислим отличительные особенности алгоритма симплекс-метода для решения вспомогательной задачи [7]:

- Использование зоны мультипликаторов для хранения обратной матрицы задачи;
- Метод повторения для очистки зоны мультипликаторов;
- Настройка различных схем выбора оптимального столбца, таких как правило Бленда, метод барьера и т. д.;

- Алгоритмический учет верхних и нижних границ переменных;
- Возможность «дорешивания» задачи с существующим базисным планом при изменении границ переменных или границ ограничений.

ВЫВОДЫ

Математическая модель и представленные методы решения задачи являются основой комплекса программных средств, разработанных

в ИТ-парке ПетрГУ в рамках планово-стратегического развития ПетрГУ. Программная система установлена на реальное предприятие ЦБП (ОАО «Кондопога») и испытана в условиях производственного процесса. В ходе испытаний было установлено, что уменьшение отхода – 1–2 %, а это является существенной экономией в рамках объемов крупного предприятия. Указанная оптимизация стала возможной благодаря разработке и использованию математического аппарата теории исследования операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов А. Ф., Воронин А. В., Кузнецов В. А. и др. Оптимизация в планировании и управлении предприятиями регионального лесопромышленного комплекса. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001. 228 с.
2. Воронин Р. В. Математические модели и методы автоматизированных систем планирования производства бумаги: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. Петрозаводск, 2004.
3. Воронин А. В., Кузнецов В. А. Математические модели и методы в планировании и управлении предприятием ЦБП. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2000. 254 с.
4. Воронин А. В., Кузнецов В. А. Прикладные оптимизационные задачи в целлюлозно-бумажной промышленности. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2000. 152 с.
5. Канторович Л. В., Романовский И. В. Математические методы в управлении экономикой. М.: Знание, 1977. 337 с.
6. Кузнецов В. А. Задачи раскроя в целлюлозно-бумажной промышленности. СПб.: Изд-во СПбЛТА, 2000. 132 с.
7. Романовский И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977. 352 с.
8. Швецов Ю. Н., Смирнова Э. А. Расчет основных параметров бумаго- и картоноделательных машин. СПб.: Изд-во СПбГУРП, 2009. 64 с.

Urban A. R., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)
Kuznetsov V. A., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

MATHEMATICAL MODELS AND METHODS OF OUTPUT PRODUCTION TIMELINE CONSIDERATION IN CUTTING REELS OF PAPER MACHINE

A complex of mathematical models and methods for solving the problem of timeline consideration in the process of product shipment during paper machine reels' cutting is presented. The purpose of the complex is to facilitate in the economic use of material resources resulting in reduction of industrial wastes, to reduce the volume of defective products, and to increase efficiency and quality of industrial management.

Key words: cutting the reels of paper machine, dynamic programming, linear programming

REFERENCES

1. Bulatov A. F., Voronin A. V., Kuznetsov V. A. i dr. *Optimizatsiya v planirovanii i upravlenii predpriyatiyami regional'nogo lesopromyshlennogo kompleksa* [Optimization in planning and management of enterprises belonging to regional timber industry]. Petrozavodsk, PetrGU Publ., 2001. 228 p.
2. Voronov R. V. *Matematicheskie modeli i metody avtomatizirovannykh sistem planirovaniya proizvodstva bumagi: Avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk* [Mathematical models and methods for automated paper production planning: author's thesis of PhD tech. sci. diss.]. Petrozavodsk, 2004.
3. Voronin A. V., Kuznetsov V. A. *Matematicheskie modeli i metody v planirovanii i upravlenii predpriyatiem tsellyulozno-bumazhnoy promyshlennosti* [Mathematical models and methods in the enterprise planning and management]. Petrozavodsk, PetrGU Publ., 2000. 254 p.
4. Voronin A. V., Kuznetsov V. A. *Prikladnye optimizatsionnye zadachi v tsellyulozno-bumazhnoy promyshlennosti* [Applied optimization problems in pulp and paper industry]. Petrozavodsk, PetrGU Publ., 2000. 152 p.
5. Kantorovich L. V., Romanovskiy I. V. *Matematicheskie metody v upravlenii ekonomikoy* [Mathematical methods in managing economy]. Moscow, Znanie Publ., 1977. 337 p.
6. Kuznetsov V. A. *Zadachi raskroya v tsellyulozno-bumazhnoy promyshlennosti* [Cutting tasks in the pulp and paper industry]. St. Petersburg, SPbLTA Publ., 2000. 132 p.
7. Romanovskiy I. V. *Algoritmy resheniya ekstremal'nykh zadach* [Algorithms for solving extreme problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 352 p.
8. Shvetsov Yu. N., Smirnova E. A. *Raschet osnovnykh parametrov bumago- i kartonodelatel'nykh mashin* [The calculation of the basic parameters of paper and board machines]. St. Petersburg, 2009. 64 p.

Поступила в редакцию 01.07.2013