

СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ БАКУШЕВ

доктор технических наук, профессор кафедры механики  
Инженерно-строительного института, Пензенский госу-  
дарственный университет архитектуры и строительства  
(Пенза, Российская Федерация)  
tim-graf\_penza@rambler.ru

## ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассматривается задача построения дифференциальных уравнений характеристик и соотношений на них, а также определения скоростей распространений продольно-поперечных волн деформаций в сплошной среде, механическое поведение которой описывается геометрически-нелинейными аналогами произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и деформаций. Исследуются условия возникновения чисто продольных и чисто поперечных волн. В качестве примера строятся векторные диаграммы продольно-поперечных геометрически-нелинейных волн деформаций для трех геометрически-нелинейных аналогов математических моделей сплошной среды.

Ключевые слова: волны деформаций, плоская задача, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность

Задача определения напряженно-деформированного состояния полупространства при действии на его поверхности изменяющихся во времени нормальных  $p(t)$  и касательных  $q(t)$  нагрузок (рис. 1) сводится, вообще говоря, к определению параметров продольно-поперечных волн деформаций, распространяющихся в сплошной среде.

Для сплошной среды, механическое поведение которой описывается уравнениями теории пластического течения, либо уравнениями динамики грунтов С. С. Григоряна, либо уравнениями билинейной теории пластичности, обзор решений данной задачи изложен в монографии [3].

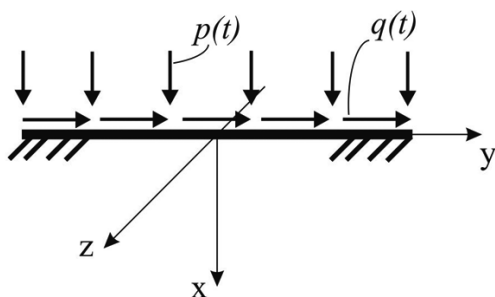


Рис. 1

В данной работе рассматриваются сплошные среды, механическое поведение которых описывается геометрически-нелинейными аналогами произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров  $\sigma^*$  и  $\varepsilon^*$  и вторыми инвариантами девиаторов  $T^*$  и  $\Gamma^*$  обобщенных напряжений и деформаций:

$$\sigma^* = 3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \varepsilon^*; \quad T^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \Gamma^*, \quad (1)$$

здесь  $K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  – геометрически-нелинейный аналог модуля объемного расширения (сжатия),

$G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  – геометрически-нелинейный аналог модуля сдвига.

Пусть на поверхности полупространства действуют равномерно-распределенные нагрузки, бесконечно протяженные в направлении осей  $y$  и  $z$  (см. рис. 1). Полупространство будет находиться в условиях плоской задачи:

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = 0. \quad (2)$$

Тогда [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \varepsilon_x^*(x), \\ \varepsilon_y^* &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\gamma_{xy}^* = \gamma_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^*(x).$$

При этом  $\varepsilon^* = \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* = \varepsilon_x^*$ ,

$$\Gamma^* = \sqrt{4(\varepsilon_x^*)^2 + 3(\gamma_{xy}^*)^2} / \sqrt{3}. \quad (4)$$

Физические уравнения для геометрически-нелинейной модели сплошной среды имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \varepsilon^*; \quad \tau_{xy}^* = G^* \gamma_{xy}^*; \\ \sigma_y^* &= \left( K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \varepsilon^*; \quad \tau_{yz}^* = 0; \\ \sigma_z^* &= \left( K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \varepsilon^*; \quad \tau_{zx}^* = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя соотношения (5) в динамические уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_x^* + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy}^* \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tau_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_y^* \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_x^* + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tau_{xy}^* \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{yx}^* + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_y^* \right] = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned} \quad (6)$$

и учитывая зависимости (1) и (4), получим два уравнения, описывающих процесс распространения продольно-поперечных геометрически-нелинейных волн деформаций:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \left[ \varepsilon_x + \frac{1}{2} (\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2) \right] + (1 + \varepsilon_x)^2 A \right\} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \\
& + (1 + \varepsilon_x) (A \varepsilon_x + B) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}; \\
& (1 + \varepsilon_x) (\gamma_{xy} A + C) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \\
& + \left\{ \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \left[ \varepsilon_x + \frac{1}{2} (\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2) \right] + \right. \\
& \left. + \gamma_{xy} (A \gamma_{xy} + B) + (C \gamma_{xy} + D) \right\} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t}.
\end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (8)$$

Значения коэффициентов  $A, B, C, D$  равны:

$$\begin{aligned}
A &= \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} \right) \varepsilon^* + \\
&+ \frac{4(\varepsilon^*)^2}{3 \Gamma^*} \left( \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right); \\
B &= \frac{\varepsilon^* \gamma_{xy}^*}{\Gamma^*} \left( \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right); \\
C &= \gamma_{xy}^* \left( \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{4 \varepsilon^*}{3 \Gamma^*} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right); \\
D &= G^* + \frac{(\gamma_{xy}^*)^2}{\Gamma^*} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*}.
\end{aligned} \quad (9)$$

Присоединяя к уравнениям (7) уравнения совместности

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (10)$$

получаем систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно величин

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

В матричной форме система уравнений (7), (10)

имеет вид:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  равны:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

причем

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left( K^* + 4G^*/3 \right) \left[ \varepsilon_x + (\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2)/2 \right] + \\
&+ (1 + \varepsilon_x)^2 A; \\
a_{12} &= (1 + \varepsilon_x) (A \gamma_{xy} + B); \\
a_{21} &= (1 + \varepsilon_x) (\gamma_{xy} A + C); \\
a_{22} &= \left( K^* + 4G^*/3 \right) \left[ \varepsilon_x + (\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2)/2 \right] + \\
&+ \gamma_{xy} (A \gamma_{xy} + B) + (C \gamma_{xy} + D).
\end{aligned} \quad (12)$$

Вектор-столбец  $\bar{\mathbf{u}}$  имеет следующую структуру:  $\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & v_x & v_y \end{bmatrix}^T$ .

Характеристические кривые уравнения (11) определяются путем решения уравнения  $|\mathbf{A} - \alpha \mathbf{B}| = 0$  или в развернутой форме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha \rho & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \alpha \rho \\ -\alpha & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

вещественные решения которого задают характеристические кривые, описываемые дифференциальными уравнениями:

$$\alpha_{i,j} = \frac{dx}{dt}, \quad i=1,2; \quad j=1,2. \quad (13)$$

Здесь

$$\alpha_{1,1} = +\sqrt{M_1/(2\rho)}, \quad \alpha_{1,2} = -\sqrt{M_1/(2\rho)},$$

$$\alpha_{2,1} = +\sqrt{M_2/(2\rho)}, \quad \alpha_{2,2} = -\sqrt{M_2/(2\rho)},$$

причем

$$M_{1,2} = (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}. \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения (13) определяют, вообще говоря, четыре семейства характеристических кривых. Система уравнений (7), (10) будет гиперболического типа, если все  $\alpha_{i,j}$  будут вещественными.

Найдем соотношения вдоль характеристических направлений. Введем вектор  $\bar{\mathbf{l}} = [l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4]$ . Компоненты вектора  $\bar{\mathbf{l}}$  являются решением уравнения  $\bar{\mathbf{l}} \cdot (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{B}) = 0$ , откуда находим:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \alpha^2 \rho) \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 &= 0; \\ (a_{22} - \alpha^2 \rho) \cdot l_2 + a_{12} \cdot l_1 &= 0; \\ l_3 - \alpha \rho \cdot l_1 &= 0; \\ l_4 - \alpha \rho \cdot l_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Соотношения вдоль характеристик найдем на основании уравнения  $\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{B} \cdot \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} \right) = 0$ , откуда

$$l_3 \frac{d\epsilon_x}{dt} + l_4 \frac{d\gamma_{xy}}{dt} - \rho l_1 \frac{dv_x}{dt} - \rho l_2 \frac{dv_y}{dt} = 0. \quad (16)$$

Используя далее зависимости (15), уравнение (16) приведем к виду:

$$a_{21}(\alpha^2 \rho - a_{22})(\alpha d\epsilon_x - dv_x) + \\ + \alpha(\alpha^2 \rho - a_{11})(\alpha^2 \rho - a_{22})d\gamma_{xy} - a_{12}a_{21}dv_y = 0. \quad (17)$$

Итак, вдоль четырех семейств характеристик (13) выполняются соотношения (17).

Запишем систему уравнений (7), (10) в терминах перемещений. Используя соотношения (8), систему (7) приведем к виду:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Система (10) при этом удовлетворяется тождественно.

Пусть  $\omega(x, t) = 0$  – уравнение поверхности разрыва [4]. Применяя кинематические условия совместности  $\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_u$  к системе (18),

получим динамические условия совместности:

$$\left. \begin{aligned} \left[ a_{11} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 - \rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] \lambda_u + a_{12} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \lambda_v &= 0; \\ a_{21} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \lambda_u + \left[ a_{22} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 - \rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] \lambda_v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Поскольку значения скоростей распространения волн  $N$  по нормали к фронту определяются соотношением:

$$N^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 / \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right],$$

а направляющие косинусы  $l_i$  вектора нормали к фронту волны в локальной системе координат, совпадающей с главными осями, равны

$$l_1^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 / \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$l_2^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 / \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right],$$

то система (19) после элементарных преобразований получает вид:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} l_1^2 - \rho N^2) \lambda_{u_1} + a_{12} l_1^2 \lambda_{u_2} &= 0; \\ a_{21} l_1^2 \lambda_{u_1} + (a_{22} l_1^2 - \rho N^2) \lambda_{u_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Приравнявая к нулю определитель системы (20), то есть полагая для коэффициентов прерывности  $\lambda_{u_1}$  и  $\lambda_{u_2}$  существование ненулевых решений, получим:

$$2\rho N_{1,2}^2 = l_1^2 \left[ (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right]. \quad (21)$$

Формула (21) определяет две независимые скорости распространения продольно-поперечных волн деформаций в сплошной среде.

Выпишем коэффициенты, входящие в формулы (19) и, соответственно, в формулу (21). При этом будем помнить, что в главных осях

$$\gamma_{xy}^* = \gamma_{yx}^* = 0, \text{ однако } \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial x} \neq 0 \text{ и } \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial y} \neq 0.$$

Кроме того, для данной задачи  $\gamma_{xy}^* = \gamma_{xy}$ .

На основании соотношений (4) получаем  $\varepsilon^*/\Gamma^* = \sqrt{3/4}$ . Теперь коэффициенты  $A, B, C, D$ , определяемые соотношениями (9), будут равны:

$$A = \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} \right) \sqrt{\frac{3}{4}} \Gamma^* + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right) \Gamma^*;$$

$$B = 0; \quad C = 0; \quad D = G^*.$$

Следовательно,

$$a_{11} = \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \sqrt{\frac{3}{4}} \Gamma^* + (1 + \sqrt{3} \Gamma^*) \left[ \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} \right) \sqrt{\frac{3}{4}} \Gamma^* + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right) \Gamma^* \right];$$

$$a_{12} = 0; \quad a_{21} = 0;$$

$$a_{22} = \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \sqrt{\frac{3}{4}} \Gamma^* + G^*.$$

С учетом соотношений (22) формула (21) получает вид:

$$2\rho N_1^2 = l_1^2 (2a_{11}); \quad 2\rho N_2^2 = l_2^2 (2a_{22}). \quad (23)$$

Рассмотрим условия возникновения и распространения чисто продольных и чисто поперечных волн деформаций.

В локальной системе координат, совпадающей в каждой точке сплошной среды с направлениями главных деформаций (напряжений), введем вектор  $\bar{\lambda}$  с составляющими  $(\lambda_{u_1}, \lambda_{u_2})$  в каждой точке сплошной среды. Пусть  $\lambda_n$  – проекция вектора  $\bar{\lambda}$  на нормаль к переднему фронту волны (рис. 2), то есть  $\lambda_n = \lambda_{u_1} l_1 + \lambda_{u_2} l_2$ , где  $l_1 = \cos(\alpha)$ ,  $l_2 = \sin(\alpha)$ ;  $l_1$  и  $l_2$  – направляющие косинусы нормали к переднему фронту волны.

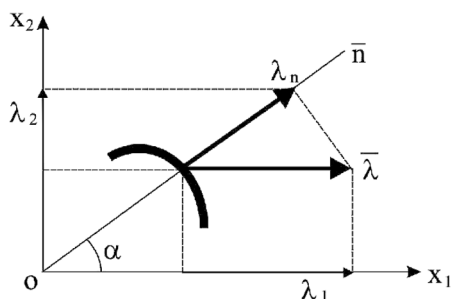


Рис. 2

*Случай 1.* Пусть  $l_1 = 1, l_2 = 0$ , то есть главное направление  $x_1$  совпадает с направлением нормали к фронту волны ( $\alpha = 0$ ). Система (20) получает вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho N^2) \lambda_{u_1} = 0; \\ (a_{22} - \rho N^2) \lambda_{u_2} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Отсюда получаем:  $N_1^2 = a_{11}/\rho, N_2^2 = a_{22}/\rho$ .

Рассмотрим распространение волны N1. Если  $N = N_1$ , то система (24) приводится к виду:

$$\begin{cases} 0 \cdot \lambda_{u_1} = 0; \\ (a_{22} - \rho N^2) \lambda_{u_2} = 0, \end{cases}$$

то есть так как  $a_{22} \neq \rho N_1^2$ , то  $\lambda_{u_2} = 0$ . Это означает, что из двух составляющих вектора  $\bar{\lambda}$  одна равна нулю, то есть проекции  $\lambda_n$  и  $\lambda_{u_1}$  совпадают с самим вектором  $\bar{\lambda}$ , то есть главное направление  $x_1$  и нормаль к фронту волны  $\bar{n}$  совпадают с вектором скорости  $N_1$ . Имеет место чисто продольная волна.

При рассмотрении распространения волны  $N_2$ , то есть  $N = N_2$ , система (24) получает вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho N_2^2) \lambda_{u_1} = 0; \\ 0 \cdot \lambda_{u_2} = 0. \end{cases}$$

Это означает, так как  $a_{11} \neq \rho N_2^2$ , что  $\lambda_{u_1} = 0$ , то есть проекции  $\lambda_n$  и  $\lambda_{u_2}$  совпадают с самим вектором  $\bar{\lambda}$ . Следовательно, главное направление  $x_1$  и нормаль к фронту волны  $\bar{n}$  перпендикулярны к вектору скорости  $N_2$ . Имеет место чисто поперечная волна.

*Случай 2.* Пусть  $l_1 = 0, l_2 = 1$ , то есть главное направление  $x_2$  совпадает с направлением нормали к фронту волны ( $\alpha = 90^\circ$ ). Система (19) получает вид:

$$\begin{cases} -\rho N^2 \lambda_{u_1} = 0; \\ -\rho N^2 \lambda_{u_2} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Отсюда следует, что  $N = 0$ , то есть в направлении главного направления  $x_2$  волна не распространяется.

На рис. 3 показаны векторные диаграммы мгновенных скоростей продольно-поперечных геометрически-нелинейных волн деформаций, построенные по уравнениям (23) для трех математических моделей сплошной среды.

*Модель 1.* Механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом, то есть деформационные зависимости (1) имеют вид:

$$\sigma^* = K_0 \varepsilon^*; \quad T^* = G_0 \Gamma^*. \quad (26)$$

*Модель 2.* Механическое поведение сплошной среды описывается квадратичным законом в от-

ношении сдвиговых деформаций. Деформационные зависимости (1) в этом случае равны:

$$\sigma^* = K_0 \varepsilon^*; T^* = G_0 (1 - \Gamma^* / (2\Gamma_s)) \Gamma^*. \quad (27)$$

**Модель 3.** Механическое поведение сплошной среды описывается перекрестными зависимостями между инвариантами напряженного и деформированного состояний:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= K_0 \left[ 1 - (q/\varepsilon^*) (2 - \Gamma^*/\Gamma_s)^2 (\Gamma^*/\Gamma_s)^2 \right] \varepsilon^*; \\ T^* &= \left[ G_0 (1 - \Gamma^*/(2\Gamma_s)) + K_0 f (q/\Gamma_s) (2 - \Gamma^*/\Gamma_s)^2 (\Gamma^*/\Gamma_s) - \right. \\ &\quad \left. - K_0 f (\varepsilon^*/\Gamma^*) \right] \Gamma^*. \end{aligned} \quad (28)$$

Модель 1 соответствует геометрически-нелинейному аналогу линейной теории упругости, модель 2 соответствует геометрически-нелинейному аналогу теории малых упруго-пластических деформаций, модель 3 соответствует геометрически-нелинейному аналогу деформационной теории пластичности сыпучей среды [1], [2].

На рис. 3 сплошная линия соответствует приведенным скоростям  $2\rho N_1^2/G_0$ , пунктирная – скоростям  $2\rho N_2^2/G_0$ .

В формулах (26), (27), (28) имеем:  $K_0$  – начальный модуль объемного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге;  $f$  – аналог коэффициента внутреннего трения;  $q$  – коэффициент дилатансии;  $\Gamma_s$  – предельная интенсивность деформаций сдвига, причем  $0 \leq \Gamma^*/\Gamma_s \leq 1$ .

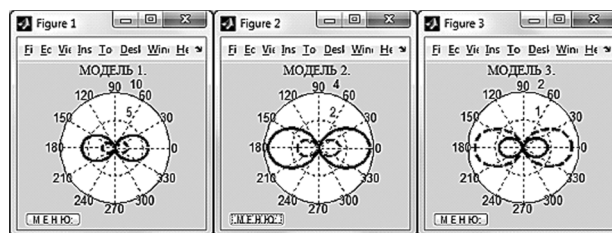


Рис. 3. Векторные диаграммы мгновенных скоростей продольно-поперечных геометрически-нелинейных волн деформаций

Исходные данные:

$$\begin{aligned} K_0/G_0 &= 1,1547; q/\Gamma_s = 1; \Gamma^*/\Gamma_s = 0,75; \\ \Gamma_s &= 0,1155; f = 0,5. \end{aligned}$$

Численные исследования показывают, что скорости распространения продольно-поперечных волн деформаций существенно зависят как от рассматриваемого направления распространения волны, так и от уровня напряженного и деформированного состояния в рассматриваемой точке среды, а также от величины физических констант материала сплошной среды.

Изложенные в статье результаты могут быть использованы при построении алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния геометрически и физически нелинейных полупространств, находящихся в условиях плоской деформации, от действия на поверхности динамических, в том числе ударных, нагрузок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакушев С. В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 312 с.
2. Гениев Г. А. К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1974. № 4. С. 8–10.
3. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности / Пер. с польского В. А. Шачнева; Под ред. Г. С. Шапиро. М.: Мир, 1978. 307 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.

**Bakushev S. V.**, Penza State University of Architecture and Construction (Penza, Russian Federation)

#### LONGITUDINAL-CROSS GEOMETRICAL NON-LINEAR WAVES OF DEFORMATION

The author considers the task of constructing differential equations' characteristics and relations on them. The other task was to define the speed of propagation of longitudinal-cross deformation waves in continuum, mechanical behavior of which is described by arbitrary cross relations between the first invariants of tensors and second invariants of stress and deformation deviators. Conditions of the origin of purely longitudinal and pure cross-waves were researched. As an example, the vector diagrams of long cross-waves' deformation for three mathematical models of continuum are constructed.

Key words: waves of deformations, plane problem, physical non-linearity, geometric non-linearity

#### REFERENCES

1. Bakushev S. V. *Geometricheski i fizicheski nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy: Ploskaya zadacha* [Geometrically and physically nonlinear mechanics of continuum: flat]. Moscow, Librokom Publ., 2013. 312 p.
2. Geniev G. A. To the question of deformation theory of granular media of plasticity [K voprosu o deformatsionnoy teorii plastichnosti sypuchey sredy]. *Structural mechanics and calculation of structures*. 1974. № 4. P. 8–10.
3. Novatskiy V. K. *Volnovye zadachi teorii plastichnosti* [Wave problems of plasticity theory] / Translated from the Polish by V. A. Shachneff; Ed. G. S. Shapiro. Moscow, Mir Publ., 1978. 307 p.
4. Smirnov V. I. *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part 2. Moscow, Nauka Publ., 1981. 550 p.

Поступила в редакцию 19.02.2014