Февраль, № 1 **Экономика** **2010**

УДК 330.42

ЕВГЕНИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ БЕЛЫЙ
кандидат технических наук, доцент кафедры математического моделирования систем управления математического факультета ПетрГУ
belyi@psu.karelia.ru

МОРАЛЬНОЕ ОЖИДАНИЕ И ЗАДАЧА ДИВЕРСИФИКАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

В статье предлагается подход к проблеме диверсификации портфеля ценных бумаг, при котором его эффективность оценивается по моральному ожиданию.

Ключевые слова: диверсификация портфеля ценных бумаг, функция полезности денег, моральное ожидание

Наиболее известные подходы к проблеме диверсификации портфеля ценных бумаг предполагают либо минимизацию риска при фиксированной эффективности портфеля, либо достижение максимальной эффективности при фиксированном риске [3; 149–155]. При этом обычно, как в случае портфелей Г. Марковица и Д. Тобина [3; 155–164], за меру эффективности принимают математическое ожидание доходности портфеля, а за меру риска – вариацию доходности (то есть ее дисперсию). Такой подход вызывает ряд вопросов.

Во-первых, насколько вариация портфеля действительно отражает риск? Так, даже при небольшой вариации малая вероятность полного разорения может заставить отказаться от портфеля. Во-вторых, в портфелях Марковица и Тобина учитываются только такие характеристики случайных величин доходности бумаг, как их математические ожидания и вариации. Вариация двух случайных величин, то есть их ковариация, является мерой линейности связи между ними. Однако на практике зависимости могут и должны иметь более сложный характер. Следовательно, здесь мы имеем дело с упрощением, благодаря которому тесная нелинейная зависимость иногда будет восприниматься как отсутствие зависимости. И, наконец, выбор стратегии реальным экономическим субъектом в значительной мере зависит от его состояния, поскольку от состояния зависит сама его оценка жребия. Оптимальная структура портфеля ценных бумаг не может быть одинаковой для бедняка и миллионера.

В данной статье мы предлагаем подход к проблеме оптимального портфеля ценных бумаг, который, возможно, позволит избавить портфель от некоторых перечисленных выше недостатков. При этом в качестве меры эффективности портфеля мы примем его моральное ожидание.

Так как диверсификация портфеля более соответствует поведению «человека осторожного», естественно принять классическую функцию полезности денег, то есть возрастающую и выпуклую вверх. В качестве таковой мы возьмем впервые построенную Д. Бернулли логарифмическую функцию полезности вида $Z = a + b * \ln(C)$, где a и $b > 0$ – произвольные вещественные константы, C – состояние индивида, Z – полезность состояния. Эту функцию Бернулли получил, отталкиваясь от предположения, что полезность малого приращения состояния пропорциональна этому приращению и обратно пропорциональна величине состояния [2].

Независимо от значений параметров a и b такая функция полезности порождает оценку случайной величины «выигрыша» x, которую называют моральным ожиданием. Мы будем обозначать моральное ожидание случайной величины x как $\bar{\bar{x}}$ или, когда хотим подчеркнуть ее зависимость от состояния, как $Mr(x,C)$. Математическое ожидание, как обычно, будем обозначать $\bar{x}$ или M(x). Пусть в некоторой «игре» величина выигрыша может принимать значения x_i с вероятностями p_i, где $i = 1, 2, \dots n$, C – состояние игрока до начала игры. Тогда

$$\bar{\bar{x}} = Mr(x,C) = \prod_{i=1}^{n}\left(x_i + C\right)^{p_i} - C \,. \qquad (1)$$

Моральное ожидание, как оценка жребия, неявно учитывает фактор риска и зависит от состояния владельца жребия. В работе [1] исследованы наиболее существенные свойства морального ожидания произвольного порядка. Ниже мы кратко изложим их применительно к случаю морального ожидания нулевого порядка, то есть к оценке жребия, порожденной классической функцией полезности вида $Z = a + b * \ln(C)$.

Свойства морального ожидания (нулевого порядка):

- Моральное ожидание строго монотонно возрастает с ростом величины состояния C.
- Предел морального ожидания при состоянии C, стремящемся к бесконечности, равен математическому ожиданию $\lim\limits_{C\to\infty} Mr(x,C) = M(x)$.
- Моральное ожидание строго меньше математического: $Mr(x,C) < M(x)$.
- $Mr(x+a,C) = Mr(x,C+a) + a$,
  где a – произвольная вещественная константа.
- $Mr\left(a \cdot x, C\right) = a \cdot Mr\left(x, \dfrac{C}{a}\right)$,
  где a – произвольная положительная вещественная константа.
- $\lim\limits_{k\to\infty} k \cdot Mr\left(\dfrac{x}{k}, C\right) = M(x)$,
  где k – натуральное число.
- Моральное ожидание функции двух случайных величин:
  $$Mr\left(f(x,y),C\right) = Mr\left[Mr\left(f(x,y)\Big|_{x}, C\right), C\right],$$
  где $Mr\left(f(x,y)\Big|_{x}, C\right)$ – условное моральное ожидание f(x,y) при фиксированном значении x.

Поскольку рассматриваемая в этой статье оценка жребия редко встречается в литературе, прежде чем перейти к основной задаче, мы позволим себе немного отвлечься, чтобы раскрыть суть морального ожидания на примере двух задач, в которых аналогичный подход позволяет получать результаты, адекватные поведению реальных экономических субъектов.

МОРАЛЬНОЕ ОЖИДАНИЕ КАК ОЦЕНКА ЖРЕБИЯ

Задача страхования риска

Для начала исследуем одну задачу, предложенную самим Д. Бернулли. *Купец Каюс закупил в Амстердаме товар, который он мог бы продать в Петербурге за 10 000 рублей. Товар предстоит отправить в Петербург морем. Известно, что в это время года из 100 судов 5 терпят крушение. Купец не смог найти никого, кто согласился бы застраховать его груз за цену меньшую 800 рублей.*

Здесь возникают сразу два вопроса. Каким состоянием должен обладать купец (Продавец жребия), чтобы согласиться застраховать свой товар на предложенных условиях? Каким состоянием должен обладать тот, кто взялся страховать груз (Покупатель жребия)?

Любой случай страхования риска по сути сводится к тому, что жребий с неопределенным исходом x меняется на некоторую гарантированную сумму Q. Поскольку за жребий обычно предлагают сумму, меньшую его математического ожидания, значение M(x) не дает ответа на вопрос о целесообразности страхования.

Таблица распределения вероятностей для значений дохода купца имеет вид:

X	0	10 000
P	0,05	0,95

Математическое ожидание дохода $\bar{x} = 9500$. Если купец застрахует на предложенных условиях свой груз, он может рассчитывать на гарантированные 9200 руб. Когда ему следует согласиться? Когда моральное ожидание жребия, то есть его оценка жребия, будет меньше 9200 руб. То есть $Mr(x,C) < 9200$ или, согласно равенству (1), $C^{0,05} \cdot (C+10000)^{0,95} - C < 9200$. Договоримся результаты округлять до рублей. Тогда численное решение неравенства дает $C < 5042$. В дальнейшем будем говорить, что 5042 – предельное значение Продавца жребия. Распределение вероятностей для дохода страховщика задается таблицей:

X	-9200	800
P	0,05	0,95

Математическое ожидание $\bar{x} = 300$. Покупать жребий стоит, если $Mr(x,C) < 0$, то есть $(C-9200)^{0,05} \cdot (C+800)^{0,95} - C > 0$. Решение неравенства: $C > 14242$. В дальнейшем будем говорить, что 14242 – предельное значение Покупателя. Таким образом, сделка состоится, если состояние купца меньше 5042 руб., а состояние страховщика больше 14 242 руб.

Что будет, если купец распределит свой груз по двум судам? Тогда возможны три исхода: потерпели крушение два корабля, один корабль или оба судна благополучно пришли в порт. Если условия страховки остаются прежними, распределение вероятностей для значений дохода купца будет иметь вид:

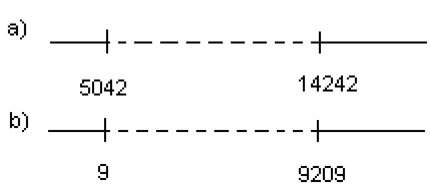
X	0	5000	10000
P	0,0025	0,095	0,9025

Оценка жребия по математическому ожиданию не изменилась: $\bar{x} = 9500$. Однако здравый смысл подсказывает, что такой способ транспортировки груза более надежен. Теперь потеря всего груза становится маловероятной, и предельное значение Продавца сдвинется далеко влево по вещественной оси. Продать жребий стоит, если $Mr(x,C) < 9200$. Решение неравенства: $C < 9$. Значит, если в кармане купца есть хотя бы 10 руб., с его стороны разумно отказаться от услуг страховщика. Таким образом, здесь оценка жребия по моральному ожиданию прекрасно согласуется с известной истиной: «Не клади все яйца в одну корзину». Для страховщика распределение вероятностей для доходов будет таким:

X	–9200	–4200	800
P	0,0025	0,095	0,9025

Страховать груз стоит, если $Mr(x,C) > 0$. Теперь, решая неравенство численно, получим $C < 9209$. Сделка состоится, если состояние купца меньше 9 руб., а состояние страховщика больше 9209 руб. Нанесем на две вещественные оси предельные значения Продавца жребия (купца) и Покупателя жребия (страховщика) для случая одного судна (рис. a) и двух судов (рис. b).

На рисунке видно, что разность предельных значений Покупателя и Продавца в точности равна той гарантированной сумме в 9200 руб., которую получит купец, если заплатит страховую сумму в 800 руб. Случайно ли это? Попробуем решить задачу в общем виде.



Предельные значения Продавца и Покупателя
в задаче о купце

Пусть x – случайная величина исхода жребия, а Q – некоторая фиксированная сумма. Тогда Продавец согласится обменять жребий за сумму Q, если его оценка жребия меньше этой суммы, то есть $Mr(x,C) < Q$. Пусть C* – решение уравнения $Mr(x,C) = Q$. Последнее уравнение имеет единственное решение в силу строго монотонного возрастания морального ожидания с ростом C. Аналогично сделка привлекательна для Покупателя, если его моральное ожидание дохода $Mr(x-Q,C) > 0$. Пусть C** – решение уравнения $Mr(x-Q,C) = 0$. Из свойств морального ожидания следует:

$$Mr(x-Q,C) = Mr(x,C-Q) - Q.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} Mr(x,C^{*}) = Q \\ Mr(x,C^{**}-Q) = Q \end{cases}. \quad (2)$$

Из строго монотонного возрастания морального ожидания следует $C^{*} = C^{**} - Q$ или $C^{**} - C^{*} = Q$.

Таким образом, разность предельных значений Покупателя и Продавца всегда равна гарантированной сумме Q, за которую продается жребий. Последнее, разумеется, верно, если и Покупатель, и Продавец «придерживаются» функции полезности одного порядка.

Задача Олигарха

Вторая задача предложена нами. *В одном небольшом государстве начинается предвыборная кампания. За должность президента должны бороться n кандидатов. Вероятность победы i-го кандидата оценивается величиной p_i, где $i = 1\ldots n$. Местный Олигарх обладает состоянием S = C + R, где R – сумма, которую он хочет потратить на поддержку кандидатов. Если он выделит сумму x_i на поддержку i-го кандидата, то в случае победы последнего может рассчитывать на «благодарность» в размере $k \cdot x_i$.* Вопрос: как Олигарх должен распорядиться суммой R? Если руководствоваться математическим ожиданием, он должен вложить все деньги в наиболее вероятного победителя. Однако на практике так не поступают. Обратимся еще раз к моральному ожиданию. $Mr(k \cdot x, C) \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_i \ge 0 \\ \sum_i x_i = R \end{cases}.$$

Вместо максимума $\bar{\bar{x}}$ удобнее искать максимум $\ln(\bar{\bar{x}} + C)$. Таким образом, задача сводится к нахождению максимума функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_i p_i \cdot \ln(k \cdot x_i + C) - \lambda \cdot \left(\sum_i x_i - R\right), \quad (3)$$

где λ – множитель Лагранжа. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv \frac{k \cdot p_i}{k \cdot x_i + C} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot (k \cdot x_i + C) = k \cdot p_i. \quad (4)$$

Суммируя левую и правую части последнего равенства по i, получим

$$\lambda \cdot \left(k \cdot \sum_i x_i + n \cdot C\right) = k \Rightarrow \lambda = \frac{k}{k \cdot R + n \cdot C}.$$

Тогда

$$x_i = \frac{p_i \cdot (k \cdot R + n \cdot C) - C}{k}. \quad (5)$$

При этом следует исключить из рассмотрения тех кандидатов, для которых $x_i \le 0$, то есть

$$p_i \le \frac{C}{k \cdot R + n \cdot C},$$

и повторить расчет, приняв во внимание новые оценки вероятностей победы оставшихся кандидатов. Из равенства (5) видно, что суммы, которые следует выделить на поддержку кандидатов, являются линейными функциями вероятностей их победы.

Подставив (5) в выражение для морального ожидания дохода Олигарха, мы получим

$$Mr(x,C) = \frac{k \cdot R + n \cdot C}{2^E} - C,$$

где $E = -\sum_i p_i \cdot \log_2 p_i$ – энтропия, то есть мера неопределенности [4]. Итак, при прочих равных условиях с ростом неопределенности моральное ожидание жребия снижается.

ДИВЕРСИФИКАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Таким образом, мы будем искать портфель, имеющий максимальное моральное ожидание доходности. Чтобы избежать громоздких выражений и сохранить наглядность, рассмотрим портфель из трех ценных бумаг со случайными величинами доходности x, y и z.

Пусть $p_{i,j,k}$ – вероятность появления тройки (x_i, y_j, z_k), где $i = 1,2\ldots n$, $j = 1,2,\ldots m$, и $k = 1,2\ldots l$. В дальнейшем будем отождествлять случайную величину доходности бумаги с самой бумагой. Итак, в портфель можно положить одну из бумаг x, y или z или же их комбинацию с доходностью $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$. Денежную сумму, затраченную на приобретение портфеля ценных бумаг, примем за единицу. Разумеется, тогда и остальное состояние покупателя должно измеряться в тех же единицах. Теперь сформулируем задачу следующим образом:

$$\bar{\bar{x}} \to \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \ge 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ x_i + C \ge 0 \\ y_i + C \ge 0 \\ z_i + C \ge 0 \end{cases}. \qquad (6)$$

Здесь $\bar{\bar{x}}(\alpha,\beta,\gamma) = \prod_{i,j,k} \left[\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_j + \gamma \cdot z_k\right]^{p_{i,j,k}} - C$.

Вместо максимального значения $\bar{\bar{x}}$ будем искать максимум $\ln\left(\bar{\bar{x}} + C\right)$. Для этого введем множитель Лагранжа λ и, учитывая второе из ограничений (6), получим:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) = \sum_{i,j,k} p_{i,j,k} \cdot \ln\left(\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_j + \gamma \cdot z_k + C\right) - \\ - \lambda \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 1). \qquad (7)$$

Откуда

$$\begin{cases} F'_\alpha \equiv \sum_{i,j,k} p_{i,j,k} \cdot \dfrac{x_i}{\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_j + \gamma \cdot z_k + C} - \lambda = 0 \\ F'_\beta \equiv \sum_{i,j,k} p_{i,j,k} \cdot \dfrac{y_i}{\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_j + \gamma \cdot z_k + C} - \lambda = 0 \\ F'_\gamma \equiv \sum_{i,j,k} p_{i,j,k} \cdot \dfrac{z_i}{\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_j + \gamma \cdot z_k + C} - \lambda = 0 \end{cases}.$$

После ряда преобразований последней системы уравнений получим:

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{x + C}{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + C}\right) = 1 \\ M\left(\dfrac{y + C}{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + C}\right) = 1 \\ M\left(\dfrac{z + C}{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + C}\right) = 1 \end{cases}. \qquad (8)$$

Кроме того,

$$\lambda = 1 - C \cdot M\left(\frac{1}{\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + C}\right).$$

Систему уравнений, аналогичную (8), нетрудно получить для любого количества ценных бумаг. Все переменные, входящие в равенства (8), должны удовлетворять ограничениям (6).

Для любой ценной бумаги со случайной величиной доходности x величину x + C будем называть итоговой величиной доходности. Заметим, что

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + C = \\ = \alpha \cdot (x + C) + \beta \cdot (y + C) + \gamma \cdot (z + C)$$

и результаты, представленные равенствами (8), можно выразить так: *в оптимальном портфеле математическое ожидание отношения итогового значения любой входящей в портфель бумаги к итоговому значению всего портфеля равно единице*. Сказанное верно только для бумаг, реально входящих в портфель, то есть для бумаг, доля которых в портфеле больше нуля. Бумаги, доля которых имеет отрицательное значение, как часто поступают в подобных задачах, удаляются из портфеля, и расчет повторяется. Оптимальные значения $\alpha, \beta, \gamma \ldots \ge 0$ можно найти численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белый Е. К. О классе допустимых функций полезности денег // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Общественные и гуманитарные науки». 2009. № 5 (98). С. 83–89.
2. Бернулли Д. Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 11–27.
3. Малыхин В. И. Финансовая математика. М.: Юнити, 2002. 248 с.
4. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М.: Наука, 1973. 512 с.