УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

**Март, № 2** **Архитектура и строительство** **2010**

УДК 624.014 .074 : 539.4

**АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ**
кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета ПетрГУ
*metalll@bk.ru*

# АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЕТА КРУГОВОЙ СОСТАВНОЙ АРКИ

В работе рассматривается алгоритм расчета арки переменного сечения на основе использования основных положений общей теории составных стержней А. Р. Ржаницына. При деформационном расчете используются полученные автором выражения для определения эквивалентных модулей деформаций, учитывающие сжимаемость оси арки, деформации сдвига в стержнях арки, развитие неупругих линейных деформаций, а также деформации, связанные с искажением формы поперечного сечения стержней арки. Для исследования устойчивости получена проварьированная система уравнений равновесия составной арки.

Ключевые слова:подъемистая составная арка, эквивалентные модули деформаций, искажение формы поперечного сечения стержней, деформационный расчет, функционал потери устойчивости

В работе исследуется несущая способность круговой составной упругопластической подъемистой арки, имеющей переменное сечение по длине. Стержни, составляющие арку, соединены между собой структурными связями. Для материала стержней арки устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжением. В работе применяются основные положения общей теории составных стержней, разработанной А. Р. Ржаницыным [7]. Не учитывается влияние касательных напряжений на развитие пластических деформаций.

Деформационный расчет неупругой составной арки базируется на использовании системы дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругой круговой составной арки постоянного сечения по длине с упругоподатливыми связями сдвига и упругоподатливыми поперечными связями постоянной жесткости по длине арки [5]. Эта система уравнений предназначена для определения усилий в связях сдвига $\tau_i$ и усилий в поперечных связях $q_i$ в $n$ швах составной арки. Здесь $i$ – индекс, означающий номер шва. В данной работе осуществлена замена указанной системы дифференциальных уравнений системой уравнений в конечных разностях, в которую введены параметры, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность решаемой задачи. Круговая ось арки радиусом $R$ делится по длине на $m$ равных частей с образованием между полярными радиусами смежных сечений $j$ и $(j+1)$ угла $\phi$. Используется метод шагового нагружения конструкции [3].

Описанная система конечно-разностных уравнений на $k$-м шаге нагружения будет иметь вид:

$$\Delta^2 T_{ij}^{(k)} / \phi^2 - R^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{i,i-1,j}^{(k)} T_{i-1,j}^{(k)} - (R^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{iij}^{(k)} - 1) T_{ij}^{(k)} - \\ - R^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{i,i+1,j}^{(k)} T_{i+1,j}^{(k)} - R^2 \zeta_{ij}^{(k)} d_{i,i-1,j}^{(k)} S_{i-1,j}^{(k)} - R^2 \zeta_{ij}^{(k)} d_{iij}^{(k)} S_{ij}^{(k)} - \\ - R^2 \zeta_{ij}^{(k)} d_{i,i+1,j}^{(k)} S_{i+1,j}^{(k)} - R^2 \zeta_{ij}^{(k)} g_{ioj}^{(k)} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta^5 S_{ij}^{(k)} / \phi^5 + 2\Delta^3 S_{ij}^{(k)} / \phi^3 + \Delta S_{ij}^{(k)} / \phi +$$
$$+ R^4 \eta_{ij}^{(k)} (p_{i,i-1,j}^{(k)} \Delta T_{i-1,j}^{(k)} / \phi + p_{iij}^{(k)} \Delta T_{ij}^{(k)} / \phi + p_{i,i+1,j}^{(k)} \Delta T_{i+1,j}^{(k)} / \phi +$$
$$+ l_{i,i-1,j}^{(k)} \Delta S_{i-1,j}^{(k)} / \phi + l_{iij}^{(k)} \Delta S_{ij}^{(k)} / \phi + l_{i,i+1,j}^{(k)} \Delta S_{i+1,j}^{(k)} / \phi + \Delta p_{ioj}^{(k)} / \phi),$$

где

$$g_{i,i-1,j}^{(k)} = -\frac{1}{E_{ija}^{(k)} A_{ij}} + \frac{a_{ij} b_{i-1,j}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}},$$

$$g_{iij}^{(k)} = \frac{1}{E_{ija}^{(k)} A_{ij}} + \frac{1}{E_{i+1,ja}^{(k)} A_{i+1,j}} + \frac{a_{ij}^2}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}} + \frac{b_{ij}^2}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{xi+1,j}},$$

$$g_{i,i+1,j}^{(k)} = -\frac{1}{E_{i+1,ja}^{(k)} A_{i+1,j}} + \frac{a_{i+1,j} b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{xi+1,j}},\ g_{ir}^{(k)} = g_{ri}^{(k)},$$

$$g_{ioj}^{(k)} = -\frac{M_{i,j}^{o(k)} a_{ij}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}} - \frac{M_{i+1,j}^{o(k)} b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}} - \frac{N_{ij}^{o(k)}}{E_{ija}^{equ(k)} A_{ij}} + \frac{N_{i+1,j}^{o(k)}}{E_{i+1,ja}^{equ(k)} A_{i+1,j}},$$

$$d_{iij}^{(k)} = \frac{a_{i-1,j}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}} - \frac{b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1.j}},$$

$$d_{i,i-1,j}^{(k)} = -\frac{a_{ij}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}},\ d_{i,i+1,j}^{(k)} = \frac{b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}}, \quad (2)$$

$$p_{i,i-1,j}^{(k)} = \frac{b_{i-1,j}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}},\ p_{i,i+1,j}^{(k)} = -\frac{a_{i+1,j}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}},$$

$$p_{iij}^{(k)} = \frac{a_{ij}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}} - \frac{b_{ij}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}},$$

$$l_{i,i-1,j}^{(k)} = -\frac{1}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}},\ l_{i.i+1,j}^{(k)} = -\frac{1}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}},$$

$$l_{iij}^{(k)} = \frac{1}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}} + \frac{1}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}},\ l_{ir}^{(k)} = l_{ri}^{(k)},$$

$$p_{ioj}^{(k)} = \frac{M_{i+1,j}^{o(k)}}{E_{i+1,j}^{equ(k)} J_{x,i+1,j}} - \frac{M_{ij}^{o(k)}}{E_{ij}^{equ(k)} J_{xij}},\ i = 1..n,\ j = 0..m,$$

$T_{ij}^{(k)}$ – сдвигающее усилие в *j*-м поперечном сечении *i*-го стержня арки, возникающее от действия усилий $\tau_i^{(k)}$ при *k*-м шаге нагружения; $S_{ij}^{(k)}$ – изгибающий момент в *j*-м поперечном сечении *i*-го стержня арки, возникающий от действия усилий $q_i^{(k)}$ при *k*-м шаге нагружения; $a_{ij}$ и $b_{i-1,j}$ – расстояние от центра тяжести *j*-го поперечного сечения *i*-го стержня арки до разделяющих плоскостей ниже- и вышележащего шва; $A_{ij}$ и $J_{xij}$ – площадь и момент инерции *j*-го поперечного сечения *i*-го стержня арки; $\xi_{ij}^{(k)}$ и $\eta_{ij}^{(k)}$ – коэффициенты жесткости соответственно связей сдвига и поперечных связей на *j*-м участке *i*-го шва арки при *k*-м шаге нагружения; $E_{ija}^{(k)}$ – секущий модуль деформаций для осевого волокна *j*-го поперечного сечения *i*-го стержня арки, определяемый по диаграмме «напряжения – деформации» для материала *i*-го стержня арки, по деформации равной

$$\varepsilon_{ija}^{(k)} = (\varepsilon_{ij0}^{(k-1)} + \varepsilon_{iju}^{(k-1)}) / 2, \quad (3)$$

здесь $\varepsilon_{ij0}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{iju}^{(k-1)}$ – краевые деформации в плоской стенке *j*-го симметричного тонкостенного поперечного сечения *i*-го стержня арки при $(k-1)$-м шаге нагружения; $E_{ij}^{equ(k)}$ – эквивалентный модуль деформаций для *j*-го поперечного сечения *i*-го стержня арки, учитывающий влияние деформаций сдвига, сжимаемость оси стержня и развитие пластических деформаций для *k*-го шага нагружения; $M_{ij}^{o(k)}$ и $N_{ij}^{o(k)}$ – изгибающий момент и продольная сила, возникающие в *j*-м сечении *i*-го стержня арки от действия внешней нагрузки в основной системе при *k*-м шаге нагружения без учета усилий, возникающих в связях сдвига и поперечных связях.

Выражение для определения $E_{ij}^{equ(k)}$ было получено и опубликовано автором данной статьи ранее [9]:

$$E_{ij}^{equ(k)} = M_{ij}^{(k-1)} h_{ij} (1 - \varepsilon_{ija}^{(k-1)}) / [(\Delta\varepsilon_{ij}^{(k-1)} - \gamma_{y1ij}^{(k-1)} h_{ij} Q_{yij}'^{(k-1)}) J_{xij}], \quad (4)$$

где $M_{ij}^{(k-1)}$ – изгибающий момент в *j*-м сечении *i*-го стержня арки, возникающий при $(k-1)$-м шаге нагружения; $h_{ij}$ – высота *j*-го поперечного сечения *i*-го стержня арки; $\Delta\varepsilon_{ij}^{(k-1)} = \varepsilon_{ij0}^{(k-1)} - \varepsilon_{iju}^{(k-1)}$; $\gamma_{y1ij}^{(k-1)}$ – угол сдвига на *j*-м участке *i*-го стержня арки от единичной поперечной силы при $(k-1)$-м шаге нагружения; $Q_{yij}'^{(k-1)}$ – первая производная от поперечной силы, действующей в *j*-м сечении *i*-го стержня арки при $(k-1)$-м шаге нагружения, которая в конечно-разностной форме имеет вид:

$$Q_{yij}'^{(k-1)} \approx (Q_{yi,j+1}^{(k-1)} - Q_{yi,j-1}^{(k-1)}) / (2\phi). \quad (5)$$

Учет изменения жесткости швов $\xi_{ij}^{(k)}$ и $\eta_{ij}^{(k)}$ за пределами упругости осуществляется аналогично [8].

В (1) для определения центральных конечных разностей используются выражения [6]:

$$\begin{aligned} \Delta S_{ij}^{(k)} &= (S_{i,j+1}^{(k)} - S_{i,j-1}^{(k)}) / 2, \\ \Delta p_{ioj}^{(k)} &= (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)}) / 2, \\ \Delta^2 T_{ij}^{(k)} &= T_{i,j+1}^{(k)} - 2T_{ij}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k)}, \\ \Delta^3 S_{ij}^{(k)} &= (S_{i,j+2}^{(k)} - 2S_{i,j+1}^{(k)} + 2S_{i,j-1}^{(k)} - S_{i,j-2}^{(k)}) / 2, \\ \Delta^5 S_{ij}^{(k)} &= (S_{i,j+3}^{(k)} - 4S_{i,j+2}^{(k)} + 5S_{i,j+1}^{(k)} - \\ &- 5S_{i,j-1}^{(k)} + 4S_{i,j-2}^{(k)} - S_{i,j-3}^{(k)}) / 2. \end{aligned} \quad (6)$$

При известной функциональной зависимости между напряжениями и деформациями $\sigma = f(\varepsilon)$ для материала стержней арки краевые линейные относительные деформации в *j*-м сечении *i*-го стержня арки при $(k-1)$-м шаге нагружения являются функциями усилий

$$\varepsilon_{ij0}^{(k-1)} = \varepsilon_{ij0}^{(k-1)}(M_{xij}^{ins(k-1)}, P_{ij}^{ins(k-1)}), \quad (7)$$

$$\varepsilon_{iju}^{(k-1)} = \varepsilon_{iju}^{(k-1)}(M_{xij}^{ins(k-1)}, P_{ij}^{ins(k-1)}), \quad (8)$$

где $M_{xij}^{ins(k-1)}$ – главный момент эпюры нормальных напряжений относительно центра тяжести $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки, возникающий при $(k-1)$-м шаге нагружения арки; $P_{ij}^{ins(k-1)}$ – главный вектор эпюры нормальных напряжений в этом же сечении при $(k-1)$-м шаге нагружения арки.

Краевые деформации $\varepsilon_{ij0}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{iju}^{(k-1)}$ определяются из решения системы уравнений равновесия для $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки:

$$M_{xij}^{ins(k-1)}(\varepsilon_{ij0}^{(k-1)},\varepsilon_{iju}^{(k-1)})=M_{ij}^{(k-1)},$$
$$P_{ij}^{ins(k-1)}(\varepsilon_{ij0}^{(k-1)},\varepsilon_{iju}^{(k-1)})=N_{ij}^{(k-1)}, \tag{9}$$

где $N_{ij}^{(k-1)}$ – продольная сила, действующая в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня арки и возникающая при $(k-1)$-м шаге нагружения.

Усилия, действующие в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня арки, находятся из выражений:

$$M_{xij}^{ins(k-1)}=\sum_{k_1=0}^{u}D_{ijk_1}^{(k-1)}\sigma_{ijk_1}^{(k-1)}+\sum_{v=0}^{c}K_{ijv}^{(k-1)}\sigma_{ijv}^{(k-1)}, \tag{10}$$

$$P_{ij}^{ins(k-1)}=\sum_{k_1=0}^{u}C_{ijk_1}^{(k-1)}\sigma_{ijk_1}^{(k-1)}+\sum_{v=0}^{c}U_{ijv}^{(k-1)}\sigma_{ijv}^{(k-1)}, \tag{11}$$

где $\sigma_{ijk_1}^{(k-1)}$ – нормальное напряжение в $k_1$-м волокне плоской стенки $j$-го поперечного сечении $i$-го стержня, определяемое по известной диаграмме «напряжения – относительные деформации» в зависимости от величины линейной относительной деформации $k_1$-го волокна $i$-го стержня $\varepsilon_{ijk_1}^{(k-1)}$, которая определяется по формуле:

$$\varepsilon_{ijk_1}^{(k-1)}=a_{ijk_1}\varepsilon_{ij0}^{(k-1)}+b_{ijk_1}\varepsilon_{iju}^{(k-1)}, \tag{12}$$

здесь $a_{ijk_1}$ и $b_{ijk_1}$ – коэффициенты линейной интерполяции при разбиении стенки ветви по высоте на $u$ равных частей; $D_{ijk_1}^{(k-1)}$, $C_{ijk_1}^{(k-1)}$ – коэффициенты линейной интерполяции эпюры нормальных напряжений в плоской стенке $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня; $\sigma_{ijv}^{(k-1)}$ – нормальное напряжение в $v$-м волокне цилиндрической полки $j$-го поперечного сечении $i$-го стержня, определяемое по известной диаграмме «напряжения – относительные деформации» в зависимости от величины линейной относительной деформации $v$-го волокна $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня $\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}$; $K_{ijv}^{(k-1)}$ и $U_{ijv}^{(k-1)}$ – коэффициенты интерполяции эпюры нормальных напряжений в цилиндрической полке $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня.

Относительная деформация $\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}$ определяется с учетом влияния искажения формы $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня арки:

$$\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}=\hat{\varepsilon}_{ij0}^{(k-1)}-\xi_{ijv}^{(k-1)}/R, \tag{13}$$

где $\hat{\varepsilon}_{ij0}^{(i-1)}$ – линейная относительная деформация волокна, расположенного на пересечении плоскости стенки и срединной поверхности цилиндрической полки; $\xi_{ijv}^{(k-1)}$ – радиальное смещение узловой точки $v$ цилиндрической полки в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня при $(k-1)$-м шаге нагружения арки.

Определении t $\xi_{ijv}^{(k-1)}$ осуществляется на основе использования упругого решения, полученного в [1] для чистого изгиба и распространенного в [2] на поперечный изгиб. Дифференциальное уравнение четвертого порядка изгиба цилиндрической полки стержня арки заменяется системой линейных алгебраических уравнений в конечных разностях. Полка по ширине делится на $c$ равных частей длиной $b_1$.

Система уравнений для определения радиальных смещений узловых точек $v$ верхней цилиндрической полки запишется в виде:

$$\Delta^4\xi_{ijv}^{(k-1)}/b_1^4+4\alpha_{ijv}^{4(k-1)}\xi_{ijv}^{(k-1)}=4\alpha_{ijv}^{4(k-1)}\hat{\varepsilon}_{ij0}^{(k-1)}R,\quad v=0..c, \tag{14}$$

где $\Delta^4\xi_{ijv}^{(k-1)}$ – центральная конечная разность четвертого порядка, равная:

$$\Delta^4\xi_{ijv}^{(k-1)}=\xi_{ij,v+2}^{(k-1)}-4\xi_{ij,v+1}^{(k-1)}+6\xi_{ijv}^{(k-1)}-4\xi_{ij,v-1}^{(k-1)}+\xi_{ij,v-2}^{(k-1)}, \tag{15}$$

$$4\alpha_{ijv}^{4(k-1)}=\frac{\hat{E}_{ij0}^{(k-1)}}{E_{ijv}^{equ(k-1)}}\cdot\frac{12(1-\hat{\mu}_{ij0}^{(k-1)}\mu_{ijv}^{equ(k-1)})}{t_f^2R^2}, \tag{16}$$

здесь $\hat{E}_{ij0}^{(k-1)}$ и $\hat{\mu}_{ij0}^{(k-1)}$ – модуль деформаций и коэффициент Пуассона при $(k-1)$-м шаге загружения для волокна, расположенного на пересечении плоскости стенки и срединной поверхности верхней цилиндрической полки; $t_f$ – толщина верхней цилиндрической полки;

$$\hat{\mu}_{ij0}^{(k-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{E}_{ij0}^{(k-1)}(1-2\mu_o)}{E_o}, \tag{17}$$

$$\mu_{ijv}^{equ(k-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{E_{ijv}^{equ(k-1)}(1-2\mu_o)}{E_o}, \tag{18}$$

$E_{ijv}^{equ(k-1)}$ – эквивалентный модуль деформаций, учитывающий неупругие деформации цилиндрической полки в $v$-м продольном сечении цилиндрической полки $j$-го поперечного сечения $i$-го стержня при $(k-1)$-м загружении арки и равный

$$E_{ijv}^{equ(k-1)}=\frac{M_{ijv}^{(k-1)}E_o[3+\nu_1(1-2\nu_1)\mu_o]}{[\nu_1(1-4\mu_o+4\mu_o^2)-3(1-2\mu_o)]M_{ijv}^{(k-1)}+\Delta\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}t_f^2E_o}, \tag{19}$$

где $\Delta\varepsilon_{ijv}^{(k-1)}$ – разность краевых деформаций в продольном сечении цилиндрической полки, проходящем через узловую точку $v$;

$$\nu_1=\frac{\hat{E}_{ij0}^{(k-1)}}{E_o}. \tag{20}$$

Аналогично составляется выражение для верхней цилиндрической полки.

Выражение для определения $E_{ijv}^{equ(k-1)}$ получено автором данной статьи аналогично тому, как им было получено выражение для определения $E_{ij}^{equ(k)}$ в [9].

Первоначально расчет по формуле (19) осуществляется по параметрам напряженно-деформированного состояния, полученным при $(k-2)$-м шаге нагружения арки, а затем по уточненным деформациям, полученным из решения системы уравнений (9), вычисляется по (19) $E_{ijv}^{equ(k-1)}$.

Учет деформированного состояния двухшарнирной арки осуществляется подстановкой в выражения для параметров $g_{io}^{(k)}$ и $p_{io}^{(k)}$ следующих выражений:

$$M_{ij}^{o(k)} = H_{oi}^{(k)}[\sin\theta_j(R - w_{ij}^{(k)}) + \upsilon_{ij}^{(k)}\cos\theta_j] - \\ - V_{oi}^{(k)}[R(1-\cos\theta_j) + w_{ij}^{(k)}\cos\theta_j + \upsilon_{ij}^{(k)}\sin\theta_j] + M_{ij}^{G(k)}, \quad (21)$$

$$N_{ij}^{o(k)} = \sin(\theta_j + \beta_{ij}^{(k)})[H_{ij}^{o(k)} + \\ + ctg(\theta_j + \beta_{ij}^{(k)})(V_{oi}^{(k)} - G_{ij}^{(k)}), \quad (22)$$

где $H_{io}^{(k)}$ и $V_{io}^{(k)}$ – горизонтальная и вертикальная опорные реакции в узловой точке $i$-го стержня арки с номером $j = 0$, определяемые по формулам:

$$H_{io}^{(k)} = N_{io}^{(k)}\cos(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}) + Q_{iy0}^{(k)}\sin(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}), \quad (23)$$

$$V_{io}^{(k)} = N_{io}^{(k)}\sin(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}) - Q_{iy0}^{(k)}\cos(\alpha_{io}^{(k)} - \beta_{io}^{(k)}), \quad (24)$$

здесь $\alpha_{io}^{(k)}$ – угол между касательной к оси $i$-го стержня арки в узловой точке с номером $j = 0$ и полярной осью; $N_{io}^{(k)}$ и $Q_{iy0}^{(k)}$ – продольная и поперечная силы в узловой точке с номером $j = 0$ $i$-го стержня арки; $w_{ij}^{(k)}$ и $\upsilon_{ij}^{(k)}$ – перемещения центра тяжести $j$-го сечения $i$-го стержня арки соответственно в радиальном и касательном направлениях к оси $i$-го стержня недеформированной арки; $\theta_j$ – угловая координата $j$-го сечения недеформированного стержня составной арки; $\beta_{ij}^{(k)}$ – угол поворота $j$-го сечения $i$-го стержня арки; где $G_{ij}^{(k)}$ и $M_{ij}^{G(k)}$ – главный вектор и главный момент внешней нагрузки, приходящиеся на $i$-й стержень арки, отделенный $j$-м сечением.

Для определения $w_{ij}^{(k)}$ и $\upsilon_{ij}^{(k)}$ используются известные дифференциальные зависимости [4], представленные в конечно-разностной форме,

$$\Delta^2 w_{ij}^{(k)} / \phi^2 + w_{ij}^{(k)} = -\frac{R^2 M_{ij}^{(k)}}{E_{ij}^{equ} J_{xij}}, \quad (25)$$

$$\beta_{ij}^{(k)} = (\Delta w_{ij}^{(k)} / \phi + \upsilon_{ij}^{(k)}) / R, \quad (26)$$

$$\Delta\upsilon_{ij}^{(k)} / \phi - w = 0, \quad (27)$$

где $\Delta\upsilon_{ij}^{(k)}$, $\Delta w_{ij}^{(k)}$ и $\Delta^2 w_{ij}^{(k)}$ – центральные конечные разности первого и второго порядка, равные:

$$\Delta\upsilon_{ij}^{(k)} = \upsilon_{i+1,j}^{(k)} - \upsilon_{i-1,j}^{(k)} / 2, \quad (28)$$

$$\Delta w_{ij}^{(k)} = w_{i+1j}^{(k)} - w_{i-1j}^{(k)} / 2, \quad (29)$$

$$\Delta^2 w_{ij}^{(k)} = w_{i,j+1}^{(k)} - 2w_{ij}^{(k)} + w_{i,j-1}^{(k)}, \quad (30)$$

$M_{ij}^{(k)}$ – суммарный изгибающий момент в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня основной системы, равный:

$$M_{ij}^{(k)} = M_{ij}^{o(k)} + M_{ij}^{T(k)} + M_{ij}^{S(k)}, \quad (31)$$

здесь $M_{ij}^{T(k)}$ – изгибающий момент в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня, возникающий от действия усилий в связях сдвига, равный:

$$M_{ij}^{T(k)} = -T_{i-1,j}^{(k)} b_{i-1,j} - T_{ij}^{(k)} a_{ij}, \quad (32)$$

$M_{ij}^{S(k)}$ – изгибающий момент в $j$-м поперечном сечении $i$-го стержня, возникающий от действия усилий в поперечных связях, равный:

$$M_{ij}^{S(k)} = -\int\int q_i^{(k)} ds^2 + \int\int q_{i-1}^{(k)} ds^2 = -S_{ij}^{(k)} + S_{i-1,j}^{(k)}, \quad (33)$$

здесь $q_i^{(k)}$ – усилия в поперечных связях $i$-го шва, отнесенные к единице длины стержня, при $k$-м шаге нагружения.

Совместное решение вышеприведенных уравнений с учетом граничных условий позволяет выполнить деформационный расчет арки за пределом упругости.

С учетом ранее принятых обозначений проварьированная система уравнений равновесия с учетом влияния сдвигающих сил и реакций поперечных связей примет вид:

$$\begin{gathered}
[H_{oi} + (V_{oi} - G_{ij})ctg(\theta_j + \beta_{ij})]\cos(\theta_j + \beta_{ij})\delta\beta_{ij} + \\
+ [\delta H_{oi} - \csc^2(\beta_{ij} + \theta_j)(V_{oi} - G_{ij})\delta\beta_{ij}]\sin(\theta_j + \\
+ \beta_{ij}) + \delta N_{ij}^T - \delta P_{ij}^{ins} = 0, \\
\delta H_{oi}[\sin\theta_j(R - w_{ij}) + \upsilon_{ij}\cos\theta_j)] - \\
- H_{oi}(\sin\theta_j\delta w_{ij} - \cos\theta_j\delta\upsilon_{ij}) - \\
- V_{oi}(\cos\theta_j\delta w_{ij} + \sin\theta_j\delta\upsilon_{ij}) + \\
+ \delta M_{ij}^T + \delta M_{ij}^S + \delta M_{xij}^{ins} = 0, \\
i = 1..(n+1),;\ j = 0..m,
\end{gathered} \quad (34)$$

где

$$\delta N_{ij}^T = -\delta T_{ij} + \delta T_{i-1,j},$$

$$\delta M_{ij}^T = -\delta T_{i-1,j} b_{i-1j} + \delta T_{ij} a_{ij},$$

$$\delta T_{ij} = \sum_{\iota=1}^{n+1}\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial\varepsilon_{\iota j0}}\delta\varepsilon_{\iota j0} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial\varepsilon_{\iota ju}}\delta\varepsilon_{\iota ju} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial w_{\iota j}}\delta w_{\iota j} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial\upsilon_{\iota j}}\delta\upsilon_{\iota j}\right), \quad (35)$$

$$\delta M_{ij}^{S} = -\delta S_{i,j} + \delta S_{i-1,j},$$

$$\delta S_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij0}} \delta \varepsilon_{ij0} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \varepsilon_{iju}} \delta \varepsilon_{iju} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial w_{ij}} \delta w_{ij} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \upsilon_{ij}} \delta \upsilon_{ij} \right).$$

Вариации внутренних сил определяются по формулам:

$$\delta M_{xij}^{ins} = \frac{\partial M_{xij}^{ins}}{\partial \varepsilon_{ij0}} \delta \varepsilon_{ij0} + \frac{\partial M_{xij}^{ins}}{\partial \varepsilon_{iju}} \delta \varepsilon_{iju}, \qquad (36)$$

$$\delta P_{ij}^{ins} = \frac{\partial P_{ij}^{ins}}{\partial \varepsilon_{ij0}} \delta \varepsilon_{ij0} + \frac{\partial P_{ij}^{ins}}{\partial \varepsilon_{iju}} \delta \varepsilon_{iju}. \qquad (37)$$

В (35) следует иметь в виду, что $\tau_{n+1} = 0$ и $q_{n+1} = 0$. Определитель системы (35), составленный с учетом (35)–(37) из коэффициентов при вариациях независимых переменных решаемой задачи, представляет собой функционал потери устойчивости. Обращение в нуль этого функционала или смена знака его численного значения при подстановке в него параметров напряженно-деформированного состояния, полученного при решении системы уравнений (1), свидетельствует о критическом состоянии составной арки. Если устойчивость арки обеспечена, то производится перерасчет величины $E_{ij}^{equ(k)}$ для следующего этапа нагружения арки и вновь производится ее деформационный расчет.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бидерман В. Л. Плоский изгиб тонкостенных кривых профилей // Расчеты на прочность в машиностроении / Под ред. С. Д. Пономарева. Т. 1. М.: Машгиз, 1956. С. 448–465.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с. (Б-ка расчетчика)
3. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 61–73.
4. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 392 с.
5. Заборов В. И. Прочность и устойчивость составных арок // Научное сообщение ЦНИИС. Вып. 12. М.: Стройиздат, 1954. 70 с.
6. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.
7. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
8. Рочев А. А. Исследование устойчивости стальных перфорированных внецентренно сжатых стержней в упругопластической стадии // Металлические конструкции и испытания сооружений: Межвуз. тематич. сб. тр. № 1(134). Л.: ЛИСИ, 1977. С. 119–123.
9. Рочев А. А. Нелинейная теория расчета сквозных упругопластических статически неопределимых рамных систем // Доклады 58-й конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета: В 3 ч. Ч. 1. СПб.: СПбГАСУ, 2001. С. 93–94.