

УДК 519.8

**СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЩЕПАЛОВ**аспирант кафедры прикладной математики и кибернетики  
математического факультета ПетрГУ  
*sschepalov@hotmail.com***ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ КУЗНЕЦОВ**доктор технических наук, профессор кафедры прикладной  
математики и кибернетики математического факультета  
ПетрГУ  
*kuznetcv@mail.ru***МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
С НЕСОВМЕСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

В статье рассматривается метод решения линейной стохастической оптимизационной задачи планирования оптимального раскроя круглых лесоматериалов с целью минимизации расхода сырья. Ограничения заданы как вероятности выполнения линейных неравенств, причем ограничения могут быть несовместны. Приводится итерационный алгоритм решения задачи с несовместными ограничениями в стохастической постановке.

Ключевые слова: стохастическое программирование, приближенное решение, стохастическая модель, линейная оптимизация, несовместные ограничения

Исследования ученых в области оптимизации производства пиломатериалов из пиловочных бревен показали, что объемный выход пиломатериалов из определенного места схемы продольного раскроя бревна является случайной величиной, которая подчиняется нормальному закону распределения [4]. Оценки случайной величины зависят от диаметра бревна, толщины пиломатериала и удаленности внешней пласти пиломатериала от сердцевины. Таким образом, задача оптимального раскроя круглого лесосырья (бревен) является задачей стохастического программирования, где коэффициенты перед переменными являются независимыми нормально распределенными случайными величинами. Как правило, ограничения задачи отражают необходимость выработки некоторого фиксированного объема пиломатериалов каждого сечения, целевая функция выражает цену объема потерь сырья.

Решения детерминированной задачи (1) оптимального раскроя круглого лесосырья не обеспечивают необходимых гарантий выполне-

ния соответствующих стохастических ограничений.

$$\begin{aligned}
 f(X) &= \sum_j C_j X_j \rightarrow \min \\
 \left\{ \begin{array}{l} \sum_j A_{ij} X_j \geq B_i, \quad i \in K' \\ \sum_j A_{ij} X_j \leq B_i, \quad i \in K'' \end{array} \right. & \quad (1) \\
 K' \cap K'' &= \emptyset, \quad |K'| + |K''| = m.
 \end{aligned}$$

Более того, на данный момент не существует какого-либо общего подхода для решения задач стохастической линейной оптимизации в случае, когда система ограничений несовместна. Хорошо исследован только метод решения детерминированной задачи линейной оптимизации с несовместными ограничениями [3], на основе которого построен описанный ниже алгоритм.

В случае вероятностных ограничений речь идет о вероятности выполнения, то есть более универсальной оценке, но также возможно совмещение стохастических и детерминированных ограничений. Значения этих вероятностей можно задавать в зависимости от экономических последствий нарушения соответствующих неравенств [1]. Вероятностные условия модели записываются в виде (2):

$$\begin{cases} P\left(\sum_j A_{ij} X_j \geq B_i\right) \geq P_i, 0 < P_i < 1, i \in K' \\ P\left(\sum_j A_{ij} X_j \leq B_i\right) \geq P_i, 0 < P_i < 1, i \in K'' \end{cases} \quad (2)$$

$$A_{ij} \sim N(m_{ij}, \sigma_{ij}),$$

где  $i$  – номер ограничения,  $A_{ij}$  – нормально распределенная случайная величина,  $P_i$  – вероятность выполнения соответствующего условия.

Под решением задачи (2) подразумевается вектор  $X \geq 0$ , который обеспечивает выполнение условий с заданными вероятностями. Задача раскрытия пилочного сырья сводится к задаче стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Ее детерминированным эквивалентом является задача выпуклого программирования (3), содержащая два вида ограничений, образующих допустимое выпуклое множество:

$$f(X) = \sum_j C_j X_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_j m(A_{ij}) X_j - t_i \sqrt{\sum_j (\sigma(A_{ij}) X_j)^2} \geq B_i, i \in K' \\ \sum_j m(A_{ij}) X_j + t_i \sqrt{\sum_j (\sigma(A_{ij}) X_j)^2} \leq B_i, i \in K'' \\ X_j \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $t_i$  – коэффициент доверительности, определяющий вероятность выполнения  $i$ -го ограничения задачи.

Коэффициент доверительности вычисляется как обратная функция от функции стандартного нормального распределения  $N(1, 0)$ , ее значение находится по таблицам. Коэффициенты целевой функции детерминированы и зависят от средних значений случайных величин. Известные методы решения задачи (3) весьма сложны и трудоемки, особенно при большой размерности, поэтому некоторые исследователи разработали альтернативные итеративные способы вычисления, позволяющие эффективно решать подобного рода задачи. М. Я. Бравый и И. В. Соболев [1] предложили следующий метод решения задачи выпуклого

программирования (3), основанный на неоднократном решении задачи линейного программирования. В качестве нулевого приближения возьмем решение задачи (3) при  $t_i = 0$ ,  $X^0 = (X_1^0, \dots, X_g^0)$ . Введем обозначения (4).

$$Y_i(X) = \sum_j m(A_{ij}) X_j,$$

$$\sigma_i(X) = \sqrt{\sum_j (\sigma(A_{ij}) X_j)^2}. \quad (4)$$

На  $(K + 1)$ -й итерации работы алгоритма,  $K \geq 0$ , решается задача линейного программирования (5):

$$f(X) = \sum_j C_j X_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_j m(A_{ij}) X_j \geq B_i + t_i H_i(X^K), i \in K' \\ \sum_j m(A_{ij}) X_j \leq B_i - t_i H_i(X^K), i \in K'' \\ X_j \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Значение функции  $H_i(X)$  зависит от выполнения следующих условий:

$$H_{i \in K'}(X^0) = \begin{cases} 0, Y_i(X^0) \geq b_i + t_i \sigma_i(X^0) \\ t_i \sigma_i(X^0), \text{ иначе} \end{cases}$$

$$H_{i \in K'}(X^K) = \begin{cases} H_i(X^{K-1}), Y_i(X^K) \geq b_i + t_i \sigma_i(X^K) \\ \max\{H_i(X^{K-1}), t_i \sigma_i(X^K)\}, \text{ иначе} \end{cases} \quad (6)$$

$$H_{i \in K''}(X^0) = \begin{cases} 0, Y_i(X^0) \leq b_i - t_i \sigma_i(X^0) \\ t_i \sigma_i(X^0), \text{ иначе} \end{cases}$$

$$H_{i \in K''}(X^K) = \begin{cases} H_i(X^{K-1}), Y_i(X^K) \leq b_i - t_i \sigma_i(X^K) \\ \max\{H_i(X^{K-1}), t_i \sigma_i(X^K)\}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Здесь  $X^K$  – решение задачи (5) для  $K$ -й итерации алгоритма. Критерием сходимости задачи (3), а следовательно, и исходной задачи, является выполнение условия (7), где  $\varepsilon_j$  – заданная точность для соответствующего ограничения.

$$|\sigma_i(X^K) - \sigma_i(X^{K-1})| \leq \varepsilon_j. \quad (7)$$

Для решения задачи линейной оптимизации в стохастической постановке достаточно нескольких итераций, включая получение начального решения; алгоритм сходится даже в случае несовместных ограничений [1]. Важность решения задачи линейной оптимизации в стохастической постановке заключается в устойчивости

плана при случайном характере выхода производства, что влечет за собой сокращение корректировочных вычислений в случае нарушения плана.

В реальном производстве плановые выработки продукции достигаются, если позволяет запас времени и сырья. Если же идеальное соответствие фактической выработки плановой по каким-либо причинам невозможно, стараются выбрать такое решение, которое обеспечит наименьшее отклонение объема от плановых показателей по каждому ограничению. Таким образом, за критерий оптимизации в случае несовместных ограничений задачи (5) можно взять минимизацию невязок [3], то есть минимизацию суммы квадратов невязок (8). Выбор функции обусловлен возможностью отсутствия решения промежуточной задачи (5).

$$F = \sum_{i \in K'} \left( \left( B_i - \sum_j m(A_{ij}) X_j \right)^+ \right)^2 + \sum_{i \in K''} \left( \left( \sum_j m(A_{ij}) X_j - B_i \right)^+ \right)^2 \rightarrow \min. \quad (8)$$

Набор ограничений остается прежним и линейным, задача попадает в категорию задач квадратичной оптимизации, ее решение осуществляется методом Франка – Вулфа [3]. Чтобы привести целевую функцию (8) к квадратичной, необходимо ввести в ограничения задачи (5) искусственные переменные  $\beta_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , в результате чего система примет вид (9). Она всегда имеет непустую область решений:

$$\begin{cases} \sum_j m(A_{ij}) X_j \geq B_i + \beta_i, i \in K' \\ \sum_j m(A_{ij}) X_j \leq B_i - \beta_i, i \in K'' \end{cases} \quad (9)$$

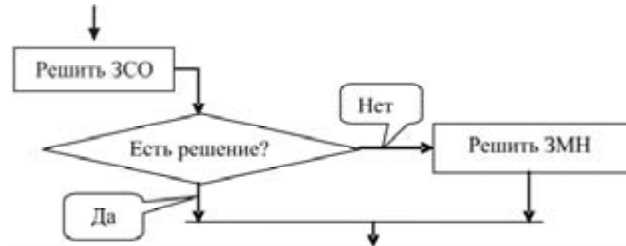
Для применения метода Франка – Вулфа необходимо выполнение свойства знакопеременности главных миноров гессиана целевой функции, что эквивалентно неравенству (10), которое однозначно выполняется только при  $A_{ij} \geq 0$ .

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j} < 0. \quad (10)$$

Выражения под квадратами в (8) не что иное, как искусственные переменные. Выполнив замену, получим (11). Таким образом, задача

$$F = \sum_{i=1}^m \beta_i^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

сводится к выпуклой задаче квадратичного программирования, которая всегда имеет решение.



Подход для решения промежуточной задачи (5)

Рассмотрим алгоритм решения задачи стохастического программирования (4–7), состоящий из 8 шагов:

1. Решение  $X$  задачи (5), в качестве значений  $Y'_i = Y_i$  и  $\sigma'_i = \sigma_i$ , где  $i$  – индекс ограничения задачи, принимаются очень большие положительные или отрицательные числа;
2. Для каждого ограничения с индексом  $1 \leq i \leq m$  вычисляются значения  $Y_i(X)$  и  $\sigma_i(X)$  по формулам (4);
3. Вычисляется максимум отклонений значений  $\sigma_i(X)$  от значений, полученных на предыдущей итерации:  

$$\Delta\sigma = \max_{1 \leq i \leq m} \{ |\sigma_i(X) - \sigma'_i| \};$$
4. Алгоритм проверяется на сходимость путем проверки условия  $\Delta\sigma \leq \alpha$ , где  $\alpha$  – заранее заданная точность вычисления;
5. Для каждого ограничения с индексом  $1 \leq i \leq m$  вычисляются значения функций и сохраняются полученные на текущем шаге значения  $Y_i(X)$  и  $\sigma_i(X)$  в переменных  $Y'_i$  и  $\sigma'_i$  соответственно;
6. Вычисляются правые части линейных ограничений задачи (5);
7. Полученная на шаге 6 детерминированная задача линейной оптимизации решается симплекс-методом;
8. Выполняется переход на шаг 2.

Проверка на существование решения может проходить только в пунктах 1 и 7. Как правило, за них отвечает один блок программного кода. Отсутствие решения стохастической задачи линейной оптимизации эквивалентно отсутствию решения соответствующей детерминированной задачи линейной оптимизации на некоторой итерации вышеприведенного алгоритма. Но не исключен такой вариант, когда часть генерируемых на этапах 5–6 детерминированных задач линейной оптимизации могут иметь решения, а часть может их не иметь. Также важно заметить, что на этапах 2–5 не требуется информация о полном перечне возможных раскросов сырья, вся необходимая информация генерируется в блоках 1 и 7. Для предотвращения остановки решения при несовместных условиях необходимо заменить пункты 1 и 7 на ветку алгоритма, приведенную на рисунке, где ЗСО – задача стохастической оптимизации, ЗМН – задача минимизации невязок.

Внутри блока производится попытка решить «входящую» задачу методом стохастического про-

граммирования, не изменяя целевую функцию, но если это невозможно, целевая функция заменяется на функцию вида (11) при прежних ограничениях, а искусственные переменные принимаются за основные. Решение обеих задач состоит из набора столбцов и значений соответствующих переменных, что позволяет переходить к последующим этапам без дополнительных преобразований.

Алгоритм был протестирован на решении нескольких сотен задач стохастической оптимизации с указанными свойствами случайных коэффициентов. В тестовых задачах было от 5 до 15 ограничений, они обладали одним из следующих свойств:

- ограничения промежуточных задач (9) совместны;
- ограничения промежуточных задач (9) на разных итерациях могут быть как совместны, так и несовместны;
- ограничения промежуточных задач (9) несовместны;

Для каждого полученного конечного решения тестовой задачи генерировались сто матриц коэффициентов ограничений и вычислялись следующие показатели:

1. Сумма квадратов значений невязок;
2. Значение целевой функции.

Для задач с несовместными ограничениями среднее значение первого показателя было на 16,4 % меньше аналогичного показателя для

задачи, где в качестве случайных коэффициентов были использованы их математические ожидания. Для задач с совместными ограничениями среднее значение второго показателя было ниже на 18,9 % при аналогичных условиях. Отрицательной стороной алгоритма является высокая трудоемкость решения: для задачи с 15–30 ограничениями время ее решения на ЭВМ с одноядерным процессором частотой 1ГГц в среднем составило 55 секунд, в то время как решение детерминированной задачи линейной оптимизации с несовместными ограничениями с таким же количеством ограничений находится за 8–10 секунд.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подход для поиска решения детерминированной задачи линейной оптимизации с несовместными ограничениями был известен давно и успешно применялся для решения промышленных задач [3]. Что касается поиска решения стохастической задачи линейной оптимизации с указанными свойствами случайных коэффициентов с несовместными ограничениями, то общего метода с доказанной сходимостью в литературе в явном виде не встречается, за исключением случаев, когда рассматриваются задачи узкоспециализированного класса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бравый М. Я., Соболев И. В. Опыт решения задачи линейного программирования со случайными технологическими коэффициентами // Математические методы в экономических исследованиях. Сер. «Оптимальное планирование и управление» / Академия наук СССР. М.: Наука, 1974. С. 17–25.
2. Воронов А. А. Исследование операций и управление. М.: Наука, 1970. 128 с.
3. Воронов Р. В. Генетический алгоритм для задачи линейного раскроя // Тр. ПетрГУ. Сер. «Прикладная математика и информатика». Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2007. С. 35–49.
4. Соболев И. В. Управление производством пиломатериалов. Петрозаводск: Карелия, 1976. 173 с.
5. Фидлер М., Недома Й., Рамик Я. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Ижевск: НИЦ РХД, 2008. 288 с.
6. Шерстобитов В. В. Математическое программирование. Ч. 1. Элементы линейной алгебры: Учеб. пособие. Л.: ЛТА им. С. М. Кирова, 1969. 88 с.