УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Июнь, № 4 **Технические науки** **2010**

УДК 519.876.5

СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ ВАСИЛЬЕВ
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой целлюлозно-бумажных и деревообрабатывающих производств лесоинженерного факультета, Петрозаводский государственный университет
servas@psu.karelia.ru

ГЕННАДИЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛЕСНИКОВ
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механики, Петрозаводский государственный университет
kgn@sampo.ru

ЛОГИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрена физическая модель фракционирования сыпучих материалов на примере рассева древесной щепы. Показано, что математическое описание данной физической модели сводится к уравнению Ферхюльста. Построена однопараметрическая модель рассева. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: сыпучий материал, древесная щепа, фракционирование, рассев, математическая модель, уравнение Ферхюльста

ВВЕДЕНИЕ

Разделение на фракции является необходимым технологическим звеном в процессе подготовки разнообразных сыпучих и гранулированных материалов к их дальнейшему использованию. В данной работе рассматривается сыпучий материал, частицы которого различны по крупности, а плотность вещества всех частиц примерно одинакова. В качестве такого материала рассматривается щепа.

Размеры и форма частиц технологической щепы должны отвечать определенным требованиям [1], [2]. Поэтому необходимо разделение массива частиц на фракции. Для фракционирования сыпучих материалов выпускается оборудование с достаточно широким спектром технологических характеристик. Например, указанные на сайте http://www.pbm.onego.ru/ промышленные установки способны перерабатывать от 80 до 950 насыпных кубических метров щепы в час, обеспечивая эффективность извлечения фракций до 85 %.

В современных экономических условиях конкурентоспособность оборудования достигается при выполнении ряда условий, к которым относятся: снижение материалоемкости и энергопотребления; повышение надежности и уменьшение эксплуатационных затрат; достаточная универсальность и технологическая гибкость, то есть возможность эффективного функционирования в определенном диапазоне технологических параметров.

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с обоснованием рекомендаций по совершенствованию конструктивно-технологических параметров фракционирования щепы методом рассева на основе применения результатов математического моделирования данного технологического процесса.

Рассматриваемая далее задача построения математической модели относится к классу задач моделирования технологических процессов разделения на фракции сыпучих и гранулированных материалов. При этом с учетом особенностей оборудования и свойств сыпучего материала выполняется разбиение данного класса на подклассы задач, появляющихся при моделировании процессов разделения на фракции разновидностей сыпучих материалов, например песка и щебня в строительной отрасли, щепы и древесных топливных гранул (пеллет) в целлюлозно-бумажной и топливной промышленности, руды на горно-обогатительных предприятиях и т. д.

Большие объемы сыпучих материалов, подлежащих разделению на фракции, возрастающие требования к качеству выпускаемой продукции, к материалоемкости, надежности, универсальности и энергопотреблению оборудования, к экономии затрат на его эксплуатацию предопределяют актуальность исследований, выполняемых с целью совершенствования конструктивно-технологических параметров установок для фракционирования. Для достижения указанной цели необходимо решение комплекса многоплановых задач с применением методов математического моделирования. Необходимы также технологические эксперименты в целях проверки адекватности математических моделей.

Современное состояние экспериментальных и теоретических исследований в области моделирования фракционирования сыпучих строительных материалов отражено, например, в работе [9]. Заметим, что некоторые типы современного оборудования, отвечающие требованиям технологической гибкости, одинаково пригодны для фракционирования минеральных и органических сыпучих материалов [7]. По этой причине результаты решения задач одного из указанных выше подклассов в определенной мере представляют интерес и при рассмотрении других задач данного класса. Например, для разработки методики решения технологической задачи о фракционировании щепы представляют интерес результаты работ [5], [9], [11].

Некоторые особенности фракционирования щепы методом рассева рассмотрены в статье [6], в которой приведена также библиография по затронутой теме. Дополняя эти данные, отметим, что проблема фракционирования сыпучих материалов привлекает внимание исследователей на протяжении всей истории развития промышленного производства. К числу первых работ в области теории фракционирования относится исследование Н. Е. Жуковского [4], выполненное в 1896 году. В этой работе предложена теория движения просеваемого (надрешетного) продукта по поверхности плоского сита, а также обосновано новое для своего времени конструктивное решение устройства для рассева сыпучего материала.

В современной технической литературе фракционирование сыпучего материала методом рассева часто обозначают термином «грохочение» [7], [9].

Анализ литературы показал, что до настоящего времени модели процесса фракционирования не позволяют ответить на многие вопросы, возникающие при проектировании и эксплуатации соответствующего оборудования, что отмечается также в работе [9], в которой с применением теории цепей Маркова предложена математическая модель фракционирования сыпучих материалов на вибрационных грохотах периодического и непрерывного действия.

Рассмотрим иной подход к построению модели фракционирования сыпучего материала. Следуя общепринятой методологии математического моделирования, рассмотрим прежде всего данный технологический процесс с физической точки зрения. Затем составим математическое описание физической модели и воспользуемся полученной в итоге математической моделью для анализа закономерностей процесса рассева.

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ РАССЕВА

Описание исследуемого технологического процесса с физической точки зрения может быть сведено к следующей системе понятий и допущений, которые необходимы для обоснования рассматриваемой далее математической модели данного процесса.

1. Исходный продукт, поступающий на сито, представляет собой механическую смесь частиц разной крупности.
2. Соотношение размеров отверстий в сите и размеров частиц таково, что только часть материала остается на сите, а другая его часть проходит через отверстия. Соответственно, различают *надрешетный продукт* и *подрешетный продукт*, а каждая частица в зависимости от крупности может быть названа *проходной* или *непроходной*.
3. Количество непроходных, проходных частиц и общее количество частиц в надрешетном продукте может быть выражено их массой. Объем древесной щепы определяют с учетом уплотнения или разрыхления массива древесных частиц [2].
4. Количество проходных частиц в надрешетном продукте с течением времени уменьшается в процессе рассева.
5. Количество непроходных частиц в надрешетном продукте остается постоянным в процессе рассева. Концентрация непроходных частиц в надрешетном продукте увеличивается в процессе рассева.
6. Непроходных частиц в подрешетном продукте нет. Количество проходных частиц в подрешетном продукте возрастает в процессе рассева.
7. Физико-механические свойства и геометрические параметры частиц фракционируемой смеси в процессе рассева не изменяются.
8. Проходная частица, находящаяся в массиве надрешетного продукта, покидает надрешетный продукт, если достигает поверхности сита и попадает в отверстие. Требуемое для этого время зависит от толщины слоя надрешетного продукта, концентрации проходных частиц, формы отверстий и от других параметров. Предполагается, что на каждом достаточно малом отрезке времени Δt

уменьшение количества проходных частиц в надрешетном продукте пропорционально величине Δt и количеству проходных частиц в надрешетном продукте в данный момент времени.

9. *Степень извлечения* проходных частиц из надрешетного продукта равна отношению количества проходных частиц в подрешетном продукте к количеству проходных частиц в надрешетном продукте на старте процесса фракционирования.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ

Пусть в момент времени $t_i = t$ количество непроходных частиц в надрешетном продукте равно Q_a. Количество проходных частиц в надрешетном продукте в тот же момент времени равно Q_b. Соответственно, общее количество частиц в надрешетном продукте равно $Q = Q_a + Q_b$. Определим концентрацию непроходных и проходных частиц в надрешетном продукте:

$$C_a = Q_a / Q\,,\; C_b = Q_b / Q\,. \tag{1}$$

В момент времени $t_{i+1} = t + \Delta t$ количество непроходных частиц в надрешетном продукте останется прежним, равным Q_a. Количество проходных частиц в надрешетном продукте уменьшится на величину ΔQ_b и будет равно $Q_b^* = Q_b - \Delta Q_b$. Соответственно, общее количество частиц в надрешетном продукте будет равно $Q^* = Q_a + Q_b - \Delta Q_b = Q - \Delta Q_b$. Определим концентрацию $C_a^* = C_a + \Delta C_a$ непроходных частиц в надрешетном продукте при $t_{i+1} = t + \Delta t$:

$$C_a + \Delta C_a = \frac{Q_a}{Q^*} = \frac{Q_a}{Q - \Delta Q_b}\,. \tag{2}$$

Анализ физического содержания моделируемой технологической ситуации позволяет сформулировать гипотезу, что величина ΔQ_b пропорциональна продолжительности отрезка времени Δt и количеству проходных частиц в надрешетном продукте Q_b. Необходимо учитывать также производительность оборудования для данного фракционируемого материала. Пусть

$$\Delta Q_b = \frac{\Delta t}{\tau} Q_b\,, \tag{3}$$

где τ – неизменяющийся с течением времени параметр модели, зависящий от конструктивно-технологических характеристик оборудования и физико-механических свойств фракционируемого материала. Параметр τ имеет размерность времени и подлежит определению по результатам технологического эксперимента. Обозначим

$$\Delta\theta = \frac{\Delta t}{\tau}\,. \tag{4}$$

Подставив (3) в (2), получим с учетом (1) и (4):

$$C_a + \Delta C_a = \frac{C_a}{1 - \Delta C_b}\,. \tag{5}$$

Перепишем равенство (5) в виде

$$(C_a + \Delta C_a)(1 - \Delta C_b) = C_a \tag{6}$$

или

$$C_a + \Delta C_a - C_a \Delta C_b - \Delta C_a \Delta C_b = C_a\,.$$

Предполагая, что ΔC_a и ΔC_b достаточно малы, и пренебрегая произведением $\Delta C_a \Delta C_b$, получим с учетом (3) соотношение $\Delta C_a = C_a \Delta\theta C_b$, которое запишем в следующем виде:

$$\frac{\Delta C_a}{\Delta\theta} = C_a C_b\,. \tag{7}$$

Переходя в (7) к пределу при $\Delta\theta \to 0$ и учитывая, что $C_a + C_b = 1$, то есть $C_b = 1 - C_a$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dC_a}{d\theta} = C_a(1 - C_a)\,. \tag{8}$$

Здесь $d\theta = dt / \tau$. Решение уравнения (8) найдем, используя, например, таблицы интегралов [3]. В итоге, учитывая, что на старте процесса фракционирования концентрация непроходных частиц в надрешетном продукте равна C_{a0}, получим выражение для определения концентрации непроходных частиц в надрешетном продукте в зависимости от безразмерного параметра времени $\theta = t / \tau$.

$$C_a = \left(1 + \left(\frac{1}{C_{a0}} - 1\right) e^{-\theta}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Выражение (9) может быть записано в следующем стандартном виде:

$$C_a = \frac{C_{a0} e^{\theta}}{1 + C_{a0}(e^{\theta} - 1)}\,. \tag{10}$$

Уравнение (8) является частным случаем логистического уравнения, которое в 1838 году опубликовал бельгийский математик Ферхюльст (P. F. Verhulst) в связи с исследованием модели роста численности населения [12]. В настоящее время это уравнение, его модификации и обобщения часто используются при построении математических моделей в исследованиях биологических, экологических и экономических проблем. С течением времени область применений этого уравнения расширяется [10], [12]. Однако применений логистического подхода к построению моделей фракционирования сыпучего материала в известных нам публикациях, в том числе представленных в виде интернет-ресурсов, найти не удалось.

Для практического применения предлагаемой модели необходимо определить значение τ. Принимая во внимание, что $\theta = t/\tau$, и используя равенство (10), получим следующее соотношение:

$$\tau = \frac{t}{\ln \dfrac{C_a(1-C_{a0})}{C_{a0}(1-C_a)}}. \quad (11)$$

Параметр τ может рассматриваться как некоторая технологическая константа. Для нахождения τ (11) достаточно определить по результатам пробного рассева поступившей на переработку щепы концентрацию непроходных частиц в надрешетном продукте C_{a0} на старте рассева и концентрацию C_a при фиксированном времени t.

Установим физический смысл параметра τ. Для этого примем $t = \tau$, то есть $\theta = 1$. Тогда из соотношения (10) следует, что

$$\frac{C_a}{C_{a0}} = \frac{e}{1 + C_{a0}(e-1)}. \quad (12)$$

Таким образом, τ представляет собой отрезок времени, по прошествии которого концентрация непроходных частиц в надрешетном продукте увеличится в n раз,

$n = e/(1 + C_{a0}(e-1)) \approx 2{,}73/(1 + 1{,}73 C_{a0})$.

Обозначим: C_{b0} – концентрация проходных частиц в надрешетном продукте на старте процесса фракционирования; C_b – концентрация проходных частиц в надрешетном продукте по прошествии некоторого времени t, $C_b = 1 - C_a$; ε – степень извлечения. Тогда в соответствии с приведенным выше определением степени извлечения получим:

$$\varepsilon = \frac{C_{b0} - C_b}{C_{b0}} = 1 - \frac{C_b}{C_{b0}} = \frac{C_a - C_{a0}}{1 - C_{a0}}. \quad (13)$$

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРОЦЕССА РАССЕВА[1]

Результаты применения предлагаемой методики (см. рисунок) согласуются с экспериментальными и расчетными данными, полученными по другим методикам [5], [9]. Разработанная модель дополняет класс однопараметрических моделей рассева, рассмотренных, например, в статье [8].

Воспользуемся разработанной моделью для анализа некоторых закономерностей исследуемого процесса фракционирования. Представленные на рисунке данные получены при моделировании трех технологических ситуаций, в каждой из которых фракционируется смесь с начальной концентрацией непроходных частиц в надрешетном продукте C_{a0}, равной 0,10; 0,25; 0,50. При этом для рассева используется одно и то же оборудование, характеризуемое во всех рассмотренных случаях одним и тем же значением τ = 16,14 с.

Наибольшая скорость рассева достигается, когда концентрация непроходных частиц в надрешетном продукте равна C_a = 0,50. Это состояние технологического процесса соответствует точке перегиба на кривой. Дальнейшее увеличение концентрации C_a происходит с уменьшающейся скоростью.

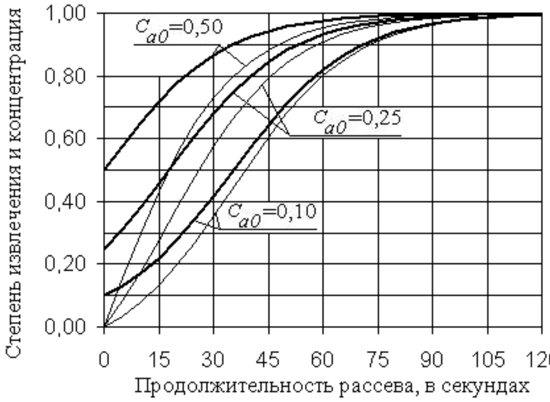
На кривой, построенной при C_{a0} = 0,50, точка перегиба имеет место при t = 0. С уменьшением C_{a0} точка перегиба сдвигается вправо и характер соответствующей логистической кривой на исследуемом интервале времени проявляется более четко.

Изменение начальной концентрации непроходных частиц от C_{a0} до C_{a0}^* приводит к сдвигу показанных на рисунке кривых на величину t^* по оси абсцисс. Значение t^* определяется из соотношения $\theta^* = t^*/\tau^*$. Можно показать, что значение параметра сдвига θ^* не зависит от времени и определяется только значениями начальной концентрации непроходных частиц в надрешетном продукте:

$$\theta^* = \ln \frac{C_{a0}(1-C_{a0}^*)}{C_{a0}^*(1-C_{a0})}. \quad (14)$$

При τ^* = τ = 16,14 с получим t^* = 17,73 с.

Соотношение (14) может быть использовано для прогнозирования качества продукции, затрат времени, энергии и других ресурсов на фракционирование в зависимости от гранулометрического состава сыпучего материала. При этом изменение параметра τ позволяет учесть влияние конструктивных и технологических характеристик оборудования для рассева и оценить его эффективность.



Изменение ε (тонкие линии) и C_a (утолщенные лини) в зависимости от C_{a0} и t

Рассмотренные закономерности дополняют результаты, известные в данной области прикладных исследований [8], [9], [11].

ВЫВОДЫ

Результаты решения модельных технологических задач с применением предлагаемой методики (см. рисунок) согласуются с известными данными, полученными другими методами.

Принципиальное отличие предлагаемой модели заключается в том, что она построена с применением логистического подхода. Применение логистического подхода позволило построить новую для затронутой области прикладных исследований модель, которая не является избыточно сложной по структуре, по составу и объемуисходных данных, по численной реализации. При этом обеспечивается степень адекватности, достаточная для практического применения при анализе закономерностей фракционирования сыпучих материалов методом рассева.

Появление логистического уравнения Ферхюльста (8) в рассматриваемом случае также неслучайно и является вполне обоснованным с физической точки зрения. Действительно, адекватность математических моделей динамики популяций с учетом продолжительности жизни особей подтверждена многочисленными исследованиями [10], [12]. В нашем случае фракционирования сыпучего материала роль особи играет отдельная проходная частица. Массив проходных частиц играет роль популяции. «Продолжительность жизни» проходной частицы в массиве надрешетного продукта измеряется отрезком времени, в течение которого эта частица пройдет путь до поверхности сита и попадет в одно из отверстий сита. Эти аналогии служат дополнительным подтверждением адекватности предлагаемой модели фракционирования сыпучего материала.

Подходы, базирующиеся на применении логистического уравнения и его обобщений, эффективно применяются во многих других областях прикладных исследований, что подтверждает фундаментальный характер результата, полученного Ферхюльстом в виде данного уравнения и его применений [12]. Отражая внутреннюю логику развития прикладных исследований, выполняемых в затронутой области на основе методологии математического моделирования, предлагаемая модель фракционирования сыпучих материалов закономерно расширяет область продуктивного применения логистического подхода.

Адекватность построенной модели и небольшой объем исходных данных позволяют рекомендовать эту модель для использования при обосновании и оптимизации конструктивных и технологических параметров оборудования, предназначенного для фракционирования древесной щепы и других сыпучих материалов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-08-00979).

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Данная часть работы выполнена при участии аспиранта А. В. Кульбицкого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гомонай М. В. Технология переработки древесины: Учебное пособие. М.: Московский государственный университет леса, 2002. 232 с.
2. ГОСТ 15815-83*. Щепа технологическая. Технические условия. М., 1983. 17 с.
3. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
4. Жуковский Н. Е. Заметка о плоском рассеве // Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. Т. 3. М.: ГИТТЛ, 1949. С. 515–522.
5. Журавлев А. Н. Теоретические основы послойного движения сыпучего тела по ситам и вибрирующим поверхностям // Труды Всесоюзного научно-исследовательского института зерна и продуктов его переработки (ВНИИЗ). Вып. 42. 1962. С. 29–46.
6. Кульбицкий А. В., Васильев С. Б. Влияние на стратификацию щепы толщины сортируемого слоя и угла наклона сит // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. 2009. № 7. С. 98–101.
7. Лоскутов А. Б., Репин К. В. Грохоты ОАО «НИИпроектасбест» для фракционирования сыпучих строительных материалов // Строительные материалы. 2008. Сентябрь. С. 2–4.
8. Непомнящий Е. А. Применение теории случайных процессов к определению закономерности сепарирования сыпучих смесей // Труды Всесоюзного научно-исследовательского института зерна и продуктов его переработки (ВНИИЗ). Вып. 42. 1962. С. 47–56.
9. Огурцов В. А. Процессы грохочения сыпучих строительных материалов: моделирование, расчет и оптимизация: Автореф. дис. … д-ра техн. наук. Иваново, 2010.
10. Постан М. Я. Обобщенная логистическая кривая: ее свойства и оценка параметров // Экономика и статистические методы. 1993. Т. 29. Вып. 2. С. 305–310.
11. Цециновский В. М. Элементы теории калибрования семян кукурузы при помощи профилированных сит // Труды Всесоюзного научно-исследовательского института зерна и продуктов его переработки (ВНИИЗ). Вып. 42. 1962. С. 177–188.
12. Verhulst P. F. (1838) // http://en.wikipedia.org/wiki/Verhulst_equation.