УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Декабрь, № 8. Т. 1 **Технические науки** **2014**

УДК 53.09

ВАЛЕРИЙ МИХАЙЛОВИЧ ЛЕВИН
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник, Мексиканский институт нефти (Мехико, Мексика)
vlevine@imp.mx

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ИЗОЛИРОВАННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ*

Решается задача об изолированной неоднородности в однородной изотропной среде с электрокинетическими свойствами. Выводятся интегральные уравнения для электромеханических полей внутри и в окрестности неоднородности. Для эллипсоидальной неоднородности эти уравнения решаются в явной аналитической форме.

Ключевые слова: электрокинетическая среда, изолированная неоднородность, электромеханические поля, эллипсоидальная неоднородность

Одной из важнейших задач фильтрации жидкости в случайно неоднородных пористых средах является замена реальной неоднородной среды на однородную с некоторыми эффективными (макроскопическими) свойствами и эквивалентной реакцией на внешние воздействия (задача гомогенизации). Решение задачи об изолированной неоднородности в неограниченной однородной среде является базовой для многих гомогенизационных схем [5]. В настоящей работе рассматривается задача об изолированной неоднородности в среде, обладающей электрокинетическими свойствами. Пусть в такой среде имеется замкнутая область V (включение) с другими электрокинетическими характеристиками. Векторы скорости фильтрации жидкости $U_i(x)$ и плотности электрического тока $I_i(x)$ связаны в среде с неоднородностью с векторами градиента давления $T_i(x)$ и электрического поля $E_i(x)$ линейными соотношениями [2] (x – произвольная точка в трехмерной среде)

$$U_i(x) = -k_{ij}(x)T_j(x) - \alpha_{ij}(x)E_j(x),\qquad I_i(x) = -\alpha_{ij}(x)T_j(x) - \sigma_{ij}(x)E_j(x) \tag{1}$$

и удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\partial_k U_k(x) = 0, \quad \partial_k I_k(x) = 0. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) обозначено: $k_{ij}(x)$ – отношение тензора проницаемости к коэффициенту вязкости жидкости, $\sigma_{ij}(x)$ – тензор электропроводности и $\alpha_{ij}(x)$ – электроосмотический тензор, $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$. Эти тензоры представляют собой кусочно-постоянные функции координат, принимающие значения $k_{ij}, \alpha_{ij}, \sigma_{ij}$, если $x \in V$, и значения $k^0_{ij}, \alpha^0_{ij}, \sigma^0_{ij}$, если $x \notin V$.

Обозначим через $V(x)$ характеристическую функцию области V, занимаемой включением:

$$V(x) = \begin{cases} 1 & (x \in V) \\ 0 & (x \notin V). \end{cases} \tag{3}$$

Эта функция позволяет представить тензоры $k_{ij}(x), \alpha_{ij}(x), \sigma_{ij}(x)$ в виде следующих сумм

$$\begin{aligned} k_{ij}(x) &= k^0_{ij} + k^1_{ij}V(x), \quad k^1_{ij} = k_{ij} - k^0_{ij},\\ \alpha_{ij}(x) &= \alpha^0_{ij} + \alpha^1_{ij}V(x), \quad \alpha^1_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha^0_{ij},\\ \sigma_{ij}(x) &= \sigma^0_{ij} + \sigma^1_{ij}V(x), \quad \sigma^1_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $p(x)$ и $\psi(x)$ представляют собой скалярные потенциалы полей $T_i(x)$ и $E_i(x)$: $T_i(x) = \partial_i p(x), E_i(x) = \partial_i \psi(x)$. Подставляя соотношения (1) в уравнения (2) с учетом формул (4), можем записать

$$\begin{aligned} k^0_{ij}\partial_i\partial_j p(x) + \alpha^0_{ij}\partial_i\partial_j\psi(x) &= f(x),\\ \alpha^0_{ij}\partial_i\partial_j p(x) + \sigma^0_{ij}\partial_i\partial_j\psi(x) &= \phi(x), \end{aligned} \tag{5}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} f(x) &= \partial_i V(x)\left[k^1_{ij}\partial_j p(x) + \alpha^1_{ij}\partial_j\psi(x)\right],\\ \phi(x) &= \partial_i V(x)\left[\alpha^1_{ij}\partial_j p(x) + \sigma^1_{ij}\partial_j\psi(x)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений (5) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0(x) + \int G(x-x')f(x')dx' + \int \Gamma(x-x')\varphi(x')dx',\\ \psi(x) &= \psi_0(x) + \int \Gamma(x-x')f(x')dx' + \int g(x-x')\varphi(x')dx'. \end{aligned} \tag{7}$$

В этих уравнениях $p_0(x)$ и $\psi_0(x)$ – поровое давление и потенциал электрического поля, которые были бы в среде без неоднородности при заданных условиях на бесконечности, $G(x), \Gamma(x), g(x)$ – компоненты функции Грина системы (7), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} k^0_{ij}\partial_i\partial_j G(x) + \alpha^0_{ij}\partial_i\partial_j\Gamma(x) &= -\delta(x),\\ \alpha^0_{ij}\partial_i\partial_j G(x) + \sigma^0_{ij}\partial_i\partial_j\Gamma(x) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} k^0_{ij}\partial_i\partial_j\Gamma(x) + \alpha^0_{ij}\partial_i\partial_j g(x) &= 0,\\ \alpha^0_{ij}\partial_i\partial_j\Gamma(x) + \sigma^0_{ij}\partial_i\partial_j g(x) &= -\delta(x), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака.

Если основная среда изотропна, то есть

$$k_{ij}^0 = k_0\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij}^0 = \alpha_0\delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^0 = \sigma_0\delta_{ij}, \tag{10}$$

то компоненты функции Грина имеют вид

$$G(x) = \frac{\sigma_0}{\Delta_0}\frac{1}{4\pi r}, \quad \Gamma(x) = -\frac{\alpha_0}{\Delta_0}\frac{1}{4\pi r},$$
$$g(x) = \frac{k_0}{\Delta_0}\frac{1}{4\pi r}, \quad \Delta_0 = k_0\sigma_0 - \alpha_0^2, \quad r = |x|. \tag{11}$$

Пусть материал включения также изотропен:

$$k_{ij}^1 = k_1\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij}^1 = \alpha_1\delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^1 = \sigma_1\delta_{ij},$$
$$k_1 = k - k_0, \quad \alpha_1 = \alpha - \alpha_0, \quad \sigma_1 = \sigma - \sigma_0. \tag{12}$$

Дифференцируя обе стороны уравнений (7) по координатам, получим

$$T_i(x) = T_i^0(x) + \int_V K_{ij}(x - x')\left[d_1 T_j(x') + d_2 E_j(x')\right]dx', \tag{13}$$

$$E_i(x) = E_i^0(x) + \int_V K_{ij}(x - x')\left[d_3 T_j(x') + d_4 E_j(x')\right]dx'. \tag{14}$$

Здесь обозначено:

$$T_i^0(x) = \partial_i p_0(x), \quad E_i^0(x) = \partial_i \psi_0(x),$$
$$K_{ij}(x) = \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{4\pi r}\right),$$
$$d_1 = \frac{1}{\Delta_0}(\sigma_0 k_1 - \alpha_0\alpha_1), \quad d_2 = \frac{1}{\Delta_0}(\sigma_0\alpha_1 - \sigma_1\alpha_0),$$
$$d_3 = \frac{1}{\Delta_0}(k_0\alpha_1 - \alpha_0 k_1), \quad d_4 = \frac{1}{\Delta_0}(k_0\sigma_1 - \alpha_1\alpha_0). \tag{15}$$

Если $x \in V$, то уравнения (13) и (14) представляют собой систему уравнений для определения полей $T_i(x)$ и $E_i(x)$ внутри V. Если эти поля внутри V известны, то поля $T_i(x)$ и $E_i(x)$ вне этой области восстанавливаются из уравнений (13) и (14) однозначно. Таким образом, поля $T_i(x)$ и $E_i(x)$ внутри V являются основными неизвестными задачи. Заметим, что ядро в этих интегральных уравнениях – формально неинтегрируемая функция с особенностью $|x|^{-3}$ в нуле. Для того чтобы придать смысл этому интегралу, будем рассматривать $K_{ij}(x)$ как обобщенную функцию. Регуляризация интегралов, связанных с действием интегрального оператора с ядром $K_{ij}(x)$ на гладкие финитные функции, приведена, в частности, в [1].

Введем следующие символические векторы и матрицы:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} T_i(x) \\ E_i(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^0(x) = \begin{bmatrix} T_i^0(x) \\ E_i^0(x) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{M}^0 = \frac{1}{\Delta_0}\begin{bmatrix} \sigma_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & k_0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$
$$\mathbf{L}^1 = \begin{bmatrix} k_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(x) = \begin{bmatrix} K_{ij}(x) & 0 \\ 0 & K_{ij}(x) \end{bmatrix}.$$

Тогда два уравнения (13) и (14) можно записать в виде одного уравнения

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}^0(x) + \int_V \mathbf{K}(x - x')\mathbf{M}^0\mathbf{L}^1\mathbf{F}(x')dx'. \tag{17}$$

Уравнение, аналогичное уравнению (17), можно получить и для пары функций $\mathbf{J}(x) = \left[U_i(x), I_i(x)\right]$ в однородной среде с изолированной неоднородностью. Введем для этой цели соотношения, обратные (1), в той же символической краткой форме

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{M}(x)\mathbf{J}(x), \quad \mathbf{M}(x) = \left[\mathbf{L}(x)\right]^{-1},$$
$$\mathbf{L}(x) = \begin{bmatrix} k(x) & \alpha(x) \\ \alpha(x) & \sigma(x) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Умножая теперь обе стороны уравнения (17) на $\mathbf{L}^0$ и используя (18), получим

$$\mathbf{L}^0\mathbf{M}(x)\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}^0(x) +$$
$$+\int_V \mathbf{L}^0\mathbf{K}(x - x')\mathbf{M}^0\mathbf{L}^1\mathbf{M}(x')\mathbf{J}(x')dx'. \tag{19}$$

С учетом соотношений

$$\mathbf{L}^0\mathbf{M} = \mathbf{L}^0\left(\mathbf{M}^0 + \mathbf{M}^1\right) = \mathbf{I}^0 + \mathbf{L}^0\mathbf{M}^1, \quad \mathbf{M}^1 = \mathbf{M} - \mathbf{M}^0,$$
$$\mathbf{L}^1\mathbf{M} = \left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^0\right)\mathbf{M} = \mathbf{I}^0 + \mathbf{L}^0\mathbf{M}^1 = -\mathbf{L}^0\mathbf{M}^1, \tag{20}$$

где $\mathbf{I}^0$ – единичная 2х2-матрица, уравнение (19) можно переписать следующим образом

$$\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}^0(x) - \int_V \mathbf{S}(x - x')\mathbf{L}^0\mathbf{M}^1\mathbf{J}(x')dx',$$
$$\mathbf{S}(x) = \begin{bmatrix} S_{ij}(x) & 0 \\ 0 & S_{ij}(x) \end{bmatrix}, S_{ij}(x) = \delta_{ij}\delta(x) + K_{ij}(x). \tag{21}$$

В общем случае уравнения (19) и (21) могут быть решены лишь численно (эффективный метод численного решения уравнений такого типа описан в [4]). Для включений эллипсоидальной формы и полиномиальных внешних полей эти уравнения имеют явное аналитическое решение. В этом случае поля внутри включения также полиномы той же степени, что и внешние (теорема о полиномиальной консервативности, см. [3]). В частности, для однородных внешних полей поля $\mathbf{F}^+ = \left[T_i^+, E_i^+\right]$ и $\mathbf{J}^+ = \left[U_i^+, I_i^+\right]$ внутри эллипсоидального включения также однородны и определяются выражениями

$$\mathbf{F}^+ = \Lambda^F\mathbf{F}^0, \quad \Lambda^F = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{M}^0\mathbf{L}^1\right)^{-1}, \tag{22}$$

$$\mathbf{J}^+ = \Lambda^J\mathbf{J}^0, \quad \Lambda^J = \left(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{L}^0\mathbf{M}^1\right)^{-1}, \tag{23}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Здесь A_{ij} и B_{ij} – тензоры с постоянными компонентами. В системе координат, связанной с главными осями эллипсоида, эти тензоры представляются в виде (по индексу i не суммировать!)

$$A_{ik} = A_i\delta_{ik}, \quad B_{ik} = \delta_{ik} - A_{ik} \tag{25}$$

$$A_i = \frac{a_1a_2a_3}{2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(a_i^2+\xi)\sqrt{(a_1^2+\xi)(a_2^2+\xi)(a_3^2+\xi)}}, \tag{26}$$

где a_1, a_2, a_3 – полуоси эллипсоида. В развернутой форме формулы (22) и (23) имеют вид

$$\begin{aligned} T_i^+ &= D_{ik}^{-1}\left[\left(\delta_{km} + d_4A_{km}\right)T_m^0 - d_2A_{km}E_m^0\right], \\ E_i^+ &= D_{ik}^{-1}\left[-d_2A_{km}T_m^0 + \left(\delta_{km} + d_1A_{km}\right)E_m^0\right] \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} U_i^+ &= C_{ik}^{-1}\left[\left(\delta_{km} + c_4B_{km}\right)U_m^0 - c_2B_{km}I_m^0\right], \\ I_i^+ &= C_{ik}^{-1}\left[-c_3B_{km}U_m^0 + \left(\delta_{km} + c_1B_{km}\right)I_m^0\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} D_{ik} &= (\delta_{ip} + d_1A_{ip})(\delta_{pk} + d_4A_{pk}) - d_2d_3A_{ip}A_{pk}, \\ C_{ik} &= (\delta_{ip} + c_1B_{ip})(\delta_{pk} + c_4B_{pk}) - c_2c_3B_{ip}B_{pk}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &c_1 = k_0s_1 - \alpha_0\beta_1, \quad c_2 = \alpha_0\kappa_1 - k_0\beta_1, \\ &c_3 = \alpha_0s_1 - \sigma_0\beta_1, \quad c_4 = \sigma_0\kappa_1 - \alpha_0\beta_1, \\ &s_1 = \frac{\sigma}{\Delta} - \frac{\sigma_0}{\Delta_0}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha}{\Delta} - \frac{\alpha_0}{\Delta_0}, \\ &\kappa_1 = \frac{k}{\Delta} - \frac{k_0}{\Delta_0}, \quad \Delta = k\sigma - \alpha^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Полученные решения покрывают широкий спектр форм неоднородностей: сфера, цилиндр, эллиптическая игла, диск. В частности, для сферической неоднородности $A_{ij} = \delta_{ij}/3$, $B_{ij} = 2\delta_{ij}/3$ и формулы (27) и (28) преобразуются в следующие

$$\begin{aligned} T_i^+ &= \frac{1}{D}\left[\left(1 + \frac{d_4}{3}\right)T_i^0 - \frac{d_2}{3}E_i^0\right], \\ E_i^+ &= \frac{1}{D}\left[-\frac{d_3}{3}T_i^0 + \left(1 + \frac{d_1}{3}\right)E_i^0\right], \\ D &= 1 + \frac{d_1 + d_4}{3} + \frac{k_1\sigma_1 - \alpha_1^2}{9\Delta_0}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \frac{1}{C}\left[\left(1 + \frac{2c_4}{3}\right)U_i^0 - \frac{2c_2}{3}I_i^0\right], \\ I_i^+ &= \frac{1}{C}\left[-\frac{2c_3}{3}U_i^0 + \left(1 + \frac{2c_1}{3}\right)I_i^0\right], \\ C &= 1 + \frac{2}{3}(c_1 + c_4) + \frac{4}{9}\Delta_0(s_1\kappa_1 - \beta_1^2). \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, при равенстве «совместной» постоянной α нулю полученные формулы распадаются на известные решения о неоднородности в среде с гидравлической и электрической проводимостями.

* Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962. 254 с.
2. Adler P., Mityushev V. Effective medium approximation and exact formulae for electrokinetic phenomena in porous media // J. Phys. A: Math Gen. 2003. № 36. P. 391–404.
3. Eshelby J. The determination of the elastic fields of an elliptical inclusion, and related problems // Proc. of the Royal Soc. of London. 1957. A241. P. 376–391.
4. Kanaun S. K., Levin V. M. Self-Consistent Methods for Composites. Vol. 1. Static Problems. Springer, 2008. 376 p.
5. Kanaun S. K., Levin V. M. Effective field method in the theory of heterogeneous media // Kachanov M., Sevostianov I. (Eds.). Effective Properties of Heterogeneous Materials. Springer, 2013. P. 199–283.

Levin V. M., Mexican Oil Institute (Mexico City, Mexico)

ON PROBLEM SOLUTION OF ISOLATED INHOMOGENEITY IN POROUS MEDIUM UNDERGOING ELECTROKINETIC PHENOMENA

The problem of isolated inhomogeneity in porous medium with electro-kinetic phenomena is solved. The integral equations for the electro-mechanical fields in such medium are developed. For the ellipsoidal inhomogeneity these equations are solved in an explicit analytical form.

Keywords: electrokinetic medium; isolated heterogeneity; electromechanical field; ellipsoidal heterogeneity.

REFERENCES

1. Mikhlin S. G. Multi-dimensional singular integrals and integral equations. Moscow, 1962. 254 p.
2. Adler P., Mityushev V. Effective medium approximation and exact formulae for electrokinetic phenomena in porous media // J. Phys. A: Math Gen. 2003. № 36. P. 391–404.
3. Eshelby J. The determination of the elastic fields of an elliptical inclusion, and related problems / / Proc. of the Royal Soc. of London. 1957. A241. P. 376–391.
4. Kanaun S. K., Levin V. M. Self-Consistent Methods for Composites. Vol. 1. Static Problems. Springer, 2008. 376 p.
5. Kanaun S. K., Levin V. M. Effective field method in the theory of heterogeneous media // Kachanov M., Sevostianov I. (Eds.) Effective Properties of Heterogeneous Materials. Springer, 2013. P. 199–283.

Поступила в редакцию 11.07.2014