Декабрь, № 8. Т. 1 **Физико-математические науки** **2014**

УДК 519.175.4

ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА ХВОРОСТЯНСКАЯ
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (Петрозаводск, Российская Федерация)
cher@krc.karelia.ru

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН*

Рассматривается докритический или критический однородный процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с N частиц, в котором число прямых потомков каждой частицы имеет распределение Пуассона. Множество реализаций такого процесса представляет собой множество лесов, состоящих из N корневых деревьев с помеченными вершинами, а распределение вероятностей на этом множестве естественным образом индуцируется ветвящимся процессом. Такие случайные леса известны как леса Гальтона–Ватсона. Для подмножества лесов Гальтона–Ватсона, в которых общее число вершин не превосходит n, получены предельные распределения числа деревьев заданного объема при N, n→∞.

Ключевые слова: ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, лес Гальтона–Ватсона, предельное распределение, число деревьев заданного объема

Рассмотрим докритический или критический процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с N частиц. Очевидно, что такой процесс распадается на N независимых подпроцессов с одной начальной частицей. Бесконечное множество всех возможных траекторий процесса представляет собой множество лесов, состоящих из N корневых деревьев с помеченными вершинами, а распределение вероятностей на этом множестве естественным образом индуцируется ветвящимся процессом. В [13] получены предельные распределения основных характеристик случайного леса Гальтона–Ватсона, в котором число вершин равно $N + n$.

Будем считать далее, что число прямых потомков каждой частицы процесса Гальтона–Ватсона имеет распределение Пуассона с параметром λ, $0 < \lambda \le 1$. Обозначим через $\xi_1, \ldots, \xi_N$ число частиц, существовавших за все время эволюции в подпроцессах, начинающихся с частиц $1, \ldots, N$ соответственно. Легко видеть, что $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и определяют объемы деревьев леса Гальтона–Ватсона за все время эволюции процесса. Заметим, что подмножество траекторий такого процесса при условии $\xi_1 + \ldots + \xi_N = N + n$ совпадает с множеством лесов с помеченными вершинами, содержащих N корневых деревьев и n некорневых вершин, свойства таких лесов изучались в [5], [6], [7] с помощью обобщенной схемы размещения [2], [3]. В работах [10], [11] предложен аналог этого метода, где сумма независимых одинаково распределенных случайных величин ограничена сверху. Используя данную модификацию, в [9], [12] получены предельные распределения числа ячеек заданного объема и максимального заполнения ячейки в схеме размещения частиц по ячейкам с пуассоновским распределением заполнения ячеек.

Известно [8], что введенные выше случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение Бореля – Таннера:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{(\lambda k)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda k}, \qquad (1)$$
$$k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda \le 1, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Далее мы будем рассматривать подмножество траекторий процесса, удовлетворяющих условию $\xi_1 + \ldots + \xi_N \le n$.

Обозначим через μ_r случайную величину, равную числу деревьев, содержащих ровно r вершин.

В теоремах 1 и 2 найдены предельные распределения случайной величины μ_r при $N \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $N \to \infty$ *и выполнено одно из следующих условий:*

1. $r \to \infty$, $(1 - \lambda) N \to \gamma$, $0 \le \gamma < \infty$, $n/N^2 \ge C > 0$;
2. $r \to \infty$, $\lambda \ge \lambda_1 > 0$, $(1 - \lambda) N \to \infty$, $(1 - \lambda)^{1/2} (N - n(1 - \lambda)) \le CN^{1/2}$, *где* $C \ge 0$;
3. $r \ge 3$, $\lambda \to 0$, $N\lambda^3 \to \infty$, $N - n(1 - \lambda) \le C(\lambda N)^{1/2}$, *где* $C \ge 0$;
4. $r = 2$, $\lambda \to 0$, $N\lambda^6 \to \infty$, $(n(1 - \lambda) - N)/(\lambda N)^{1/2} \to \infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} \left(1 + o(1)\right)$$

равномерно относительно целых неотрицательных k, для которых $(k{-}Np_r)/(Np_r)^{1/2}$ лежит в любом конечном фиксированном интервале.

Теорема 2. *Пусть $N\to\infty$, $Np_r(1-p_r)\to\infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

1. $r = 1,2$, $\lambda\to 0$, $N\lambda^{2r+2}\to\infty$, $(n(1-\lambda)-N)/(\lambda N)^{1/2}\to\infty$;
2. $r\geq 3$, $\lambda\to 0$, $N\lambda^3\to\infty$, $N-n(1-\lambda)\leq C(\lambda N)^{1/2}$, *где* $C\geq 0$;
3. $r\to\infty, 0<\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2<1$, $N-n(1-\lambda)\leq CN^{1/2}$, *где* $C\geq 0$;
4. $r\geq 1$ *фиксировано*, $0<\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2<1$, $(n(1-\lambda)-N)/N^{1/2}\to\infty$;
5. $r\geq 2$ *фиксировано*, $\lambda\to 1-1/r$, $|n(1-\lambda)-N|/N^{1/2}\leq C$, *где* $C\geq 0$;
6. $\lambda\to 1$, $(1-\lambda)N\to\infty$, $(1-\lambda)^{1/2}(N-n(1-\lambda))\leq CN^{1/2}$, *где* $C\geq 0$;
7. $(1-\lambda)N\to\gamma$, $0\leq\gamma<\infty$, $n/N^2\geq C>0$;
8. $r\geq 2$ *фиксировано*, $\lambda=1-1/r$, $(n-Nr)/N^{1/2}\to-\infty$, $n=Nr+o(N^{2/3})$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r=k\}=\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}e^{-u^2/2}$$

равномерно относительно $u=(k-Np_r)/(Np_r(1-p_r))^{1/2}$ в любом конечном фиксированном интервале.

Для доказательства теорем 1 и 2 нам потребуются вспомогательные утверждения, которые приводятся ниже в леммах 1–5.

Лемма 1. *Для $k = 0,1, \ldots, N$ справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r=k\}=\binom{N}{k}p_r^k(1-p_r)^{N-k}\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}\leq n-kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N\leq n\}},$$

где $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$, $\zeta_{N-k}^{(r)}=\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_{N-k}^{(r)}$, независимые случайные величины $\xi_1^{(r)},\ldots,\xi_N^{(r)}$ имеют распределения

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)}=l\}=\mathbf{P}\{\xi_1=l\mid\xi_1\neq r\},\quad i=1,\ldots,N,\ l=1,2,\ldots$$

Доказательство. Введем случайные величины $\eta_1,\ldots,\eta_N$, равные объемам деревьев в рассматриваемом лесе Гальтона–Ватсона. Очевидно, что справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1=k_1,\ldots,\eta_N=k_N\}=\mathbf{P}\{\xi_1=k_1,\ldots,\xi_N=k_N\mid\xi_1+\ldots+\xi_N\leq n\}.$$

В [10] показано, что отсюда следует утверждение леммы.

Обозначим

$$m=\mathbf{E}\xi_1,\ \sigma^2=\mathbf{D}\xi_1,\ m_r=\mathbf{E}\xi_1^{(r)},\ \sigma_r^2=\mathbf{D}\xi_1^{(r)}.$$

Лемма 2. *Пусть $N\to\infty$, $\lambda^3(1-\lambda)N\to\infty$. Тогда распределение случайной величины $(\zeta_N-mN)/(\sigma N^{1/2})$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению.*

Доказательство. Используя равенства

$$m=(1-\lambda)^{-1},\ \sigma^2=\lambda(1-\lambda)^{-3},\quad \mathbf{E}\xi_1^3=(1+2\lambda)(1-\lambda)^{-5} \tag{2}$$

и формулу Тейлора, находим, что для характеристической функции $\psi(t)$ случайной величины $(\zeta_N-mN)/(\sigma N^{1/2})$ выполнено соотношение $\ln\psi(t)=-t^2/2+O((N\lambda^3(1-\lambda))^{-1/2})=-t^2/2+o(1)$ при любом фиксированном t. Отсюда и из теоремы непрерывности следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $N\to\infty$, $(1-\lambda)N\to\gamma$, где γ – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда распределение суммы ζ_N/N^2 слабо сходится к распределению вероятностей с плотностью*

$$g(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi x}}\exp\left\{\gamma-\frac{\gamma^2x}{2}-\frac{1}{2x}\right\}. \tag{3}$$

Доказательство. Следуя доказательству леммы 2.4.4 [3], нетрудно показать, что для характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ_1 при любом фиксированном t выполнены соотношения: $N\ln\varphi(t/N^2)\to-(-2it)^{1/2}$ при $\lambda=1$ и $N\ln\varphi(t/N^2)\to\gamma-(\gamma^2-2it)^{1/2}$ при $\lambda\neq 1$. Отсюда и из теоремы непрерывности получаем утверждение леммы, поскольку $\exp\{\gamma-(\gamma^2-2it)^{1/2}\}$ является характеристической функцией распределения вероятностей с плотностью (3) [4].

Лемма 4. *Пусть $s\to\infty$, $s\lambda^6(1-\lambda)N\to\infty$ при $r=2$ и $s\lambda^3(1-\lambda)N\to\infty$ при $r\neq 2$. Тогда распределение случайной величины $(\zeta_s^{(r)}-m_rs)/(\sigma_rs^{1/2})$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi_r(t)$, $\psi_r(t)$ характеристические функции случайных величин $\xi_1^{(r)}$, $(\zeta_s^{(r)}-m_rs)/(\sigma_rs^{1/2})$ соответственно. Справедливо равенство:

$$\psi_r(t)=\exp\left\{-\frac{itm_rs}{\sigma_r\sqrt{s}}\right\}\varphi_r^s\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{s}}\right). \tag{4}$$

С помощью (1) несложно показать, что

$$m_r=(m-rp_r)/(1-p_r),\quad \sigma_r^2=\sigma^2(1-p_r)^{-2}(1-p_r-p_r(m-r)^2/\sigma^2),\quad \mathbf{E}(\xi_1^{(r)})^3=(1-p_r)^{-1}((1+2\lambda)(1-\lambda)^{-5}-r^3p_r). \tag{5}$$

Учитывая (1), (2), находим, что имеют место соотношения:

при $\lambda\to 0$

$$m_1=2(1+o(1)),\ m_r=1+o(1),\ r\geq 2,\quad \sigma_1^2=3\lambda/2(1+o(1)),\ \sigma_2^2=6\lambda^2(1+o(1)),\quad \sigma_r^2=\lambda(1+o(1)),\ r\geq 3, \tag{6}$$

при $0<\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2<1$

$$0<C_1\leq m_r,\ \sigma_r^2\leq C_2<\infty,\ r\geq 1, \tag{7}$$

при $\lambda\to 1$

$$m_r\leq C_3(1-\lambda)^{-1},\ \sigma_r^2=C_4(1-\lambda)^{-3}(1+o(1)), \tag{8}$$

здесь и далее через $C_1, C_2, C_3, \ldots$ обозначены некоторые положительные постоянные. Отсюда следует, что при выполнении условий леммы $\sigma_r^{\,2}s\to\infty$ и с помощью формулы Тейлора при любом фиксированном t получаем, что

$$\varphi_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{s}}\right)=1+\frac{im_r}{\sigma_r\sqrt{s}}t-\frac{\sigma_r^2+m_r^2}{2\sigma_r^2 s}t^2+\delta_r(\lambda,t), \quad (9)$$

где $|\delta_r(\lambda, t)| \le C_5\mathbf{E}(\xi_1^{(r)})^3(\sigma_r^{\,2}s)^{-3/2}$. Используя (1), (5)–(8) и формулу Стирлинга, нетрудно проверить, что при выполнении условий леммы $s\delta_r(\lambda, t)\to 0$ и из (9) находим, что $s\ln\varphi_r(t/(\sigma_r s^{1/2})) = im_r st/(\sigma_r s^{1/2}) - t^2/2 + o(1)$. Отсюда, из (4) и теоремы непрерывности следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть* $s = N(1-p_r)(1 + o(1))\to\infty$, $(1-\lambda)N\to\infty$. *Тогда распределение суммы* $\zeta_s^{(r)}/N^2$ *слабо сходится к распределению вероятностей с плотностью* (3).

Доказательство. Характеристическая функция случайной величины $\zeta_s^{(r)}/N^2$ имеет вид:

$$\psi^{(r)}(t) = (\varphi(t/N^2)-p_r\exp\{itr/N^2\})^s(1-pr)^{-s},$$

где $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_1. В лемме 3 доказано, что $\varphi^N(t/N^2)\to\exp\{\gamma-(\gamma^2-2it)^{1/2}\}$ при любом фиксированном t. С помощью этого соотношения, формулы Тейлора и неравенства $|e^{ix}-1| \le |x|$ находим, что

$$\psi_s^{(r)}(t)=e^{\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-2it}\right)s/N}\left(1+\frac{p_r\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-2it}\right)}{(1-p_r)N}+O\left(\frac{1+rp_r}{N^2}\right)\right)^s.$$

Учитывая (1) и формулу Стирлинга, нетрудно проверить, что $rp_r\to 0$ при $r\to\infty$, и, поскольку $s = N(1-p_r)(1 + o(1))$, получаем равенство $\psi_s^{(r)}(t) = \exp\{\gamma-(\gamma^2-2it)^{1/2} + o(1)\}$. Из этого соотношения и теоремы непрерывности следует утверждение леммы.

Докажем теорему 1. Пусть $v = (k-Np_r)/(Np_r)$ лежит в любом конечном фиксированном интервале. При выполнении условия 1) с помощью (1) и формулы Стирлинга нетрудно проверить, что $N-k = N(1-p_r)(1 + o(1))$, и из лемм 3, 5 получаем равенство

$$\frac{\mathrm{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)}\le n-kr\right\}}{\mathrm{P}\left\{\zeta_N\le n\right\}}=\frac{\int_0^{(n-kr)/N^2}g(x)\,dx}{\int_0^{n/N^2}g(x)\,dx}\left(1+o(1)\right), \quad (10)$$

где $(n-kr)/N^2 = n/N^2 + o(1)$, $g(x)$ определено в (3). Следовательно,

$$\frac{\mathrm{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)}\le n-kr\right\}}{\mathrm{P}\left\{\zeta_N\le n\right\}}\to 1. \quad (11)$$

Если выполнено одно из условий 2)–4) теоремы, то справедливы леммы 2 и 4, из которых получаем, что

$$\frac{\mathrm{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)}\le n-kr\right\}}{\mathrm{P}\left\{\zeta_N\le n\right\}}=\frac{\int_{-\infty}^{x_r}e^{-x^2/2}dx}{\int_{-\infty}^{y}e^{-x^2/2}dx}\left(1+o(1)\right), \quad (12)$$

где $y = (n-mN)/(\sigma N^{1/2})$, $x_r = (n-kr-m_r(N-k))/(\sigma_r(N-k)^{1/2})$. Используя (2), (5), несложно показать, что

$$y = (n(1-\lambda)^{3/2}-N(1-\lambda)^{1/2})/(\lambda N)^{1/2}, \quad (13)$$

$$x_r=\left(y+\frac{v(m-r)\sqrt{p_r}}{\sigma(1-p_r)}\right)\left(1-\frac{(m-r)^2p_r}{\sigma^2(1-p_r)}\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\left(1-\frac{v\sqrt{p_r/N}}{1-p_r}\right)^{-1/2}.$$

Учитывая (1), (2) и формулу Стирлинга, получаем, что при выполнении одного из условий 2), 3) справедливы соотношения $(m-r)^2p_r/\sigma^2\to 0$ и $x_r = y + o(y + 1)$. Следовательно, $x_r\to\infty$ при $y\to\infty$, а если $|y| \le C$, то $x_r-y\to 0$. Отсюда и из (12) находим, что справедливо (11). Если выполнено условие 4), то с помощью (1), (2) нетрудно проверить, что $x_2 = (y-v + o(y + 1))/(6\lambda)^{1/2}$, и, поскольку $y\to\infty$, легко видеть, что $x_2\to\infty$ и из (12) следует (11).

Утверждение теоремы 1 получаем из леммы 1, соотношения (11) и приближения биномиальных вероятностей распределением Пуассона.

Докажем теорему 2. Пусть $u = (k-Np_r)/(Np_r(1-p_r))^{1/2}$ лежит в конечном фиксированном интервале. Тогда $N-k = N(1-p_r)(1 + o(1))\to\infty$ и при выполнении одного из условий 1)–6) теоремы справедливы леммы 2, 4, из которых получаем (12), при этом, учитывая (5), несложно показать, что

$$x_r=\frac{\left(y+u(m-r)\sqrt{p_r(1-p_r)}/\sigma\right)(1-p_r)}{\left(1-p_r-p_r(m-r)^2/\sigma^2\right)^{1/2}\left(1-p_r-\sqrt{p_r(1-p_r)/N}\right)^{1/2}}.$$

При $\lambda\to 0$, используя (1), (2), находим, что $x_1 = (y + o(y + 1))/(1{,}5\lambda)^{1/2}$, $x_2 = (y + o(y + 1))/(6\lambda)^{1/2}$, $x_r = y + o(y + 1)$, $r \ge 3$. Отсюда и из (13) получаем, что при выполнении условия 1) теоремы $x_1, x_2\to\infty$, а из (12) следует (11). Если выполнено условие 2), то $x_r\to\infty$ при $y\to\infty$ и $x_r-y\to 0$, если $|y| \le C$. Из этих соотношений и (12) легко получить (11).

Также можно показать, что если справедливо одно из условий 3), 5), 6) теоремы, то $p_r(m-r)^2/\sigma^2\to 0$ и $x_r = y + o(y + 1)$, а если выполнено условие 4), то $x_r = (y + O(u(\lambda-1 + r^{-1})) + o(y))\times(1-(1-r + r\lambda)^2(1-\lambda)p_r\lambda^{-1}(1-p_r)^{-1})^{1/2}$. С помощью этих соотношений, аналогично случаю $\lambda\to 0$, находим, что имеет место (11).

При выполнении условия 7) справедливы леммы 3, 5, из которых следует (10). С помощью (1) для выбранных значений k нетрудно проверить, что $(n-kr)/N^2 = n/N^2 + o(1)$, и из (10) получаем (11).

Если выполнено условие 8) теоремы, то $y \to -\infty$, $y^3/N^{1/2} \to 0$, $x_r = y(1 + O(N^{-1/2}))$ и, используя теорему 6.1.1 [1], получаем (12). Легко видеть, что $x_r - y \to 0$ и из (12) следует (11).

Утверждение теоремы получаем из леммы 1, соотношения (11) и асимптотики биномиальных вероятностей нормальным распределением.

Автор выражает благодарность профессору Ю. Л. Павлову за помощь в постановке задачи и обсуждении полученных результатов.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13–01–00009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
3. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 207 с.
4. Оберхеттингер Ф. Преобразования Фурье распределений и их обращения. М.: Наука, 1979. 248 с.
5. Павлов Ю. Л. Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22. Вып. 5. С. 523–533.
6. Павлов Ю. Л. Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе // Математические заметки. 1979. Т. 25. Вып. 5. С. 751–760.
7. Павлов Ю. Л. Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе // Математический сборник. 1977. Т. 103. Вып. 3. С. 392–403.
8. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 442 с.
9. Хворостянская Е. В. О случайных пуассоновских заполнениях ячеек // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. Сер. «Математическое моделирование и информационные технологии». 2013. Вып. 4. № 1. С. 112–116.
10. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 1. С. 140–158.
11. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 3. С. 122–129.
12. Khvorostyanskaya E. V., Pavlov Yu. L. Limit distributions of the maximum cells' filling in one allocation scheme // International Multidisciplinary Journal European Researcher. 2014. (in print)
13. Pavlov Yu. L. Random forests. Utrecht, VSP, 2000. 122 p.

Khvorostyanskaya E. V., Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Center of RAS (Petrozavodsk, Russian Federation)

LIMIT DISTRIBUTION OF GIVEN SIZE TREES' NUMBER IN GALTON-WATSON FOREST WITH LIMITED NUMBER OF VERTICES

A subcritical or a critical homogeneous Galton − Watson process starting with N particles is considered. In this process, the number of offsprings from every particle has a Poisson distribution. The set of realizations of such process is a set of forests consisting of N rooted trees with labeled vertices, and the probability distribution on this set is naturally induced by the branching process. Such random forests are known as Galton − Watson forests. Under N,n→∞ we obtained limit distributions of the number of trees of a given size for a subset of Galton − Watson forests, in which the total number of vertices does not exceed n.

Key words: Galton − Watson process, Galton−Watson forest, limit distribution, number of trees of a given size

REFERENCES

1. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and stationary sequences of random variables. Groningen, Wolters–Noordhoof, 1971. 443 p.
2. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge University Press, 1999. 252 p.
3. Kolchin V. F. Random mapping. N. Y., Springer, 1986. 206 p.
4. Oberhettinger F. Fourier transforms of distributions and their inverses: a collection of tables. N. Y., Academic Press, 1973. 167 p.
5. Pavlov Yu. L. The asymptotic distribution of maximum tree size in a random forest. *Theory of Probability and its Applications*. 1978. Vol. 22. Iss. 3. P. 509–520.
6. Pavlov Yu. L. A case of limit distribution of the maximal volume on a tree in a random forest. *Mathematical notes*. 1979. Vol. 25. Iss. 5. P. 387–392.
7. Pavlov Yu. L. Limit theorems for the number of trees of the given size in a random forest. *Mathematics of the USSR*. 1977. Vol. 32. № 3. P. 335–345.
8. Sevast'yanov B. A. *Vetvyashchiesya protsessy* [Branching processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 442 p.
9. Khvorostyanskaya E. V. On random Poisson allocation of cells [O sluchaynykh puassonovskikh zapolneniyakh yacheek]. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Ser. "Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii"* [Proc. of the Karelian Research Centre of the RAS. Ser. "Mathematical modeling and information technologies."]. 2013. Issue 4. № 1. P. 112–116.
10. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalized allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012. Vol. 22. Iss. 1. P. 101–122.
11. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalized allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012. Vol. 22. Iss. 3. P. 307–314.
12. Khvorostyanskaya E. V., Pavlov Yu. L. Limit distributions of the maximum cells' filling in one allocation scheme. *International Multidisciplinary Journal European Researcher*. 2014. (in print)
13. Pavlov Yu. L. Random forests. Utrecht, VSP, 2000. 122 p.

Поступила в редакцию 16.05.2014