

ЮРИЙ БОРИСОВИЧ ГОЛЬДШТЕЙН

кандидат технических наук, профессор кафедры общетехнических дисциплин Института лесных, инженерных и строительных наук, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
ybgol@psu.karelia.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Напряженное состояние стержневой конструкции характеризуется ее потенциальной энергией деформации. Интегральная формула этой энергии при наличии в составе конструкции тонкостенных стержней насчитывает 11 слагаемых, каждое из которых содержит хотя бы одну геометрическую характеристику поперечного сечения стержня. В государственных стандартах прокатных профилей, разработанных более двадцати лет тому назад, приводятся значения далеко не всех требуемых для современных расчетов характеристик сечения. Для определения не попавших в стандарты величин предлагается использовать приближенные формулы, имеющиеся в учебной и справочной литературе. В настоящей работе предложена методика вычисления геометрических характеристик, учитывающая реальное очертание контура сечения, и приводится сопоставление полученных результатов с результатами, найденными по приближенным формулам. Различие для двутавров и швеллеров, имеющих наклон внутренних граней полок, оказалось весьма существенным.

Ключевые слова: геометрические характеристики, тонкостенные стержни, коэффициенты формы, наклонные грани

Призматические тонкостенные стержни открытого профиля широко используются в каркасах многопролетных и многоэтажных зданий, а также в качестве отдельных элементов сооружений. Однако полноценные силовые расчеты пространственных конструкций, содержащих тонкостенные стержни, до сих пор выполнять не удается. Точнее, нет возможности корректно рассчитать многостержневую конструкцию, ибо анализ напряженно-деформированного состояния отдельного элемента всегда можно выполнить численно, перейдя, например, от модели стержня к модели складчатой оболочки либо применив прием, изложенный в монографии [1; 381]. Что же касается введения в модель конструкции узла с семью степенями свободы, то пока в этом направлении продвинуться не удалось. Поэтому имеет смысл заняться предварительными исследованиями, направленными на анализ процедур, которые неизбежно будут использоваться при оценке работоспособности конструкций, испытывающих стесненное кручение в совокупности с другими деформациями. В частности, интерес представляет процедура вычисления перемещений по формуле Мора. Эта формула может быть получена по теореме Кастильяно, если известно выражение для потенциальной энергии W деформации конструкции. Полная формула для энергии W на страницах публикаций по механике твердого деформируемого тела – гость крайне редкий, хотя вывод ее не такой уж и сложный. Найти ее можно в монографии [3; 336]. Приводимая ниже запись несколько отличается от записи, содержащейся в публикации [3]. Итак,

$$W = \frac{1}{2} \int_L \left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_x^2}{GI_x} + \frac{B_\omega^2}{EI_\omega} + \frac{\mu_z Q_z^2}{GF} + \frac{\mu_y Q_y^2}{GF} + \frac{\mu_\omega M_\omega^2}{GI_\omega^*} + \frac{\mu_{zy} Q_y Q_z}{GF} + \frac{\mu_{z\omega} Q_y M_\omega}{GS_z^*} + \frac{\mu_{y\omega} Q_z M_\omega}{GS_y^*} \right) ds. \quad (1)$$

Этот интеграл берется по всему осевому контуру L конструкции.

Обозначения в формуле (1) для всех усилий, площади поперечного сечения, моментов инерции и коэффициентов формы традиционные. Через $I_\omega^* = I_\omega / F$ обозначен удельный секториальный момент инерции сечения, а S_z^* и S_y^* – наибольшие по модулю значения осевых статических моментов сечения. Коэффициенты формы поперечного сечения определяются следующими интегралами:

$$\begin{aligned} \mu_z &= \frac{F}{I_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{\delta^2} dF, \mu_y = \frac{F}{I_y^2} \int_F \frac{S_y^2}{\delta^2} dF, \mu_\omega = \frac{1}{FI_\omega} \int_F \frac{S_\omega^2}{\delta^2} dF, \\ \mu_{yz} &= \frac{2F}{I_y I_z} \int_F \frac{S_y S_z}{\delta^2} dF, \mu_{y\omega} = -\frac{2S_y^*}{I_y I_\omega} \int_F \frac{S_y S_\omega}{\delta^2} dF, \quad (2) \\ \mu_{z\omega} &= -\frac{2S_z^*}{I_z I_\omega} \int_F \frac{S_z S_\omega}{\delta^2} dF. \end{aligned}$$

Толщина δ скорлупы тонкостенного сечения может быть функцией координат y и z , тогда как во всех других публикациях, в том числе и в книге [3], размер δ считается неизменным, по крайней мере в пределах любого характерного участка профиля.

Последние три слагаемые в формуле (1) являются следствием возведения в квадрат определенной суммы касательных напряжений. Множитель 2 при парных произведениях отнесен к коэффициентам формы (см. формулы (2)). К двум последним коэффициентам формы отнесен также знак минус, порождаемый отрицательным знаком в формуле, связывающей касательные напряжения стесненно-го кручения с изгибно-крутильным моментом M_{ω} .

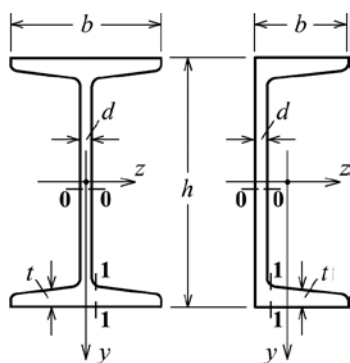


Рис. 1. Исследуемые профили

Можно показать, что для поперечных сечений, имеющих две оси симметрии (в частности, для двутавра, изображенного на рис. 1), выполняются равенства: $\mu_{yz} = \mu_{y\omega} = \mu_{z\omega} = 0$, а при наличии лишь одной оси симметрии в нуль обращаются только два коэффициента формы. Для швеллера на рис. 1 это будут коэффициенты μ_{yz} и $\mu_{z\omega}$.

Вычисления геометрических характеристик прокатных профилей громоздки, поэтому желательно выполнить их раз и навсегда и внести результаты в таблицы ГОСТ. Так это всегда и делалось, но, к сожалению, в те времена, когда речь шла лишь о расчетах на изгиб. Однако в упомянутых таблицах отсутствуют данные не только о всех геометрических характеристиках, связанных со свободным и стесненным кручением, но даже о тех коэффициентах формы сечения, которые имеют отношение к изгибу. Конечно, деформация сдвига влияет на значение потенциальной энергии деформации намного меньше, нежели деформация изгиба, но все же сдвиг для тонкостенных сечений чувствительнее, чем для сечений массивных. В любом случае, вопрос о том, какие слагаемые в формуле (1) играют существенную роль, а какими можно пренебречь, требует исследования. Найти какие-либо сведения на этот счет в литературе автору данной работы не удалось.

Однако заняться выяснением роли каждого из слагаемых, входящих в правую часть формулы (1), можно будет только после получения ответа

на вопрос, насколько корректна при вычислении геометрических характеристик сечения замена стандартного контура полки на прямоугольный контур. Дело в том, что при такой замене существенно смещается центр тяжести полки у швеллера и полуполки у двутавра. Особенно существенно это обстоятельство проявляется для профилей, внутренние грани полки которых имеют наклон. Смещение же центра тяжести сказывается на статических моментах и моментах инерции относительно центральных осей, и в первую очередь – относительно оси Oy . Все это в той или иной степени отразится на геометрических характеристиках сечения. (Кроме тех немногих, которые указаны в стандарте и пересчету не подлежат.) Все, что излагается ниже, посвящено анализу именно этой задачи.

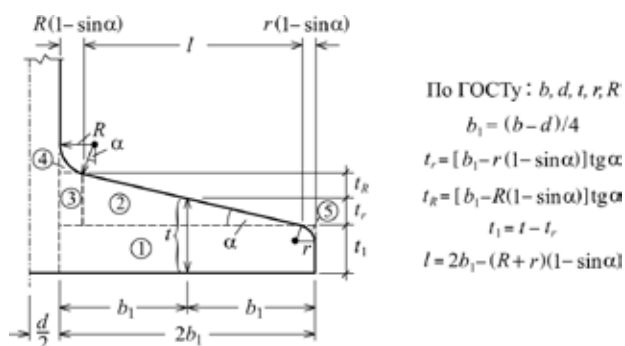


Рис. 2. Разбиение полки двутавра (швеллера) на простые фигуры

Исследованию подлежали профили двутавра и швеллера с полками, внутренние грани которых имеют наклон (ГОСТ 8239–89). Полка профиля разбивается на 5 частей так, как это показано на рис. 2. По данным, представленным на рис. 2 и 3, все геометрические характеристики сечения могут быть определены при условии, что известен угол α . Однако в стандартах этот угол не указан. О том, как он в настоящей работе определялся только по тем данным, которые указаны в ГОСТ, рассказывается ниже. Пока же приводятся формулы, имеющие отношение к рис. 3.



Рис. 3. Геометрия криволинейных треугольников

Через f на рисунке обозначена площадь криволинейного треугольника, который дополняет

закругления профиля до квадрата; система локальных координат размещена в центре тяжести фигуры. Задаваемые стандартом радиусы R и r внутреннего и внешнего закруглений полков представлены в приводимых ниже формулах символом ρ . Итак:

$$f = k\rho^2, \quad k = 1 - \frac{\pi}{4} = 0,2146; \quad c = m\rho,$$

$$m = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) \right] = 0,2234;$$

$$I_v = I_u = e\rho^4, \quad e = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - k(1-m)^2 = 7,545 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta f = g\rho^2, \quad g = 1 - \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{\pi \alpha^0}{360};$$

$$c_z = m_z \rho, \quad m_z = \frac{g}{k-g} \cdot (0,5 - m); \quad c_y = m_y \rho,$$

$$m_y = \frac{g}{k-g} \cdot (m - 0,5 + 0,5 \cos \alpha).$$

Теперь можно обратиться к подбору угла α , осуществляемому в два этапа. В первом приближении величина тангенса этого угла подбиралась так, чтобы площадь полки, найденная как сумма площадей всех пяти ее участков (при $F_5(\alpha) < 0$), равнялась величине, полученной по имеющимся в стандарте значениям площади F сечения и его размеров h и d :

$$\sum_{i=1}^5 F_i(\alpha) = 0,25 \cdot (F - h \cdot d).$$

Затем величина $\operatorname{tg} \alpha$ варьировалась таким образом, чтобы погрешности величин F , I_y , I_z и $\max S_z$ в процентном отношении сохранялись на уровне погрешностей округления этих же величин в стандарте. В результате площадь F сечения, найденная по подобранному углу α , отличалась от указанной в самом стандарте величины в среднем на 0,1 % при наибольшем отклонении для одного из 23 профилей стандарта на 0,39 % и наименьшем – на 0,01 %. Усреднение проводилось по модулям процентных отклонений. Эти же показатели для остальных приведенных в стандартах величин таковы: для $\max S_z$ – 0,07 %, 0,31 %, 0,01 %; для осевого момента инерции I_y – 0,16 %, 0,83 %, 0,01 %; для осевого момента инерции I_z – 0,11 %, 0,28 %, 0,01 %.

Путь к вычислению всех тех геометрических характеристик поперечных сечений двутавра и швеллера, которые в стандартах не упомянуты, открыт. Кроме шести коэффициентов формы, определяемых формулами (2), сюда относятся секториальный момент инерции, максимальное по модулю значение секториального статического момента, а также момент инерции свободного

кручения. Для швеллера число геометрических характеристик чуть больше: необходимо еще указать положение центра изгиба и значения двух характерных ординат эпюры секториальных площадей. Эти величины, как и коэффициенты (2), находят, вычисляя определенные интегралы, содержащие под своим знаком толщину скорлупы δ . Если грани полков имеют наклон, то толщина скорлупы в пределах полки является функцией координаты z . Вычисления этих интегралов выполнялись при замене реального профиля полки редуцированным трапецевидным профилем, показанным на рис. 4. По рисунку видно, что отличие редуцированного сечения от реального заключается только в том, что в первом из них отсутствуют внутреннее и внешнее закругления.

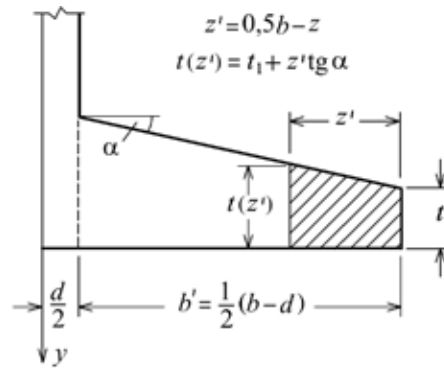


Рис. 4. Спрямолинейная внутренняя грань правой части полки двутавра

При помощи рис. 4 вычислялась, в частности, и доля момента инерции свободного кручения, приходящаяся на половину полки:

$$I_x^{sh} = \frac{1}{3} b' \int_0^{b'} (t_1 + z' \operatorname{tg} \alpha)^3 dz' =$$

$$= \frac{b'}{3} (t_1^3 + 1,5 t_1^2 b' \operatorname{tg} \alpha + t_1 b'^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 0,25 b'^3 \operatorname{tg}^3 \alpha).$$

Полученные значения моментов инерции свободного кручения двутавра и швеллера следует увеличить соответственно в 1,2 и 1,12 раза.

Несколько сложнее находить коэффициенты формы сечения. Так, доля коэффициента μ_z , обусловленная действием касательных напряжений изгиба относительно оси Oz в половине полки двутавра, определяется интегралом

$$I^{sh} = \int_F \frac{S_z^2}{t^2(z')} dF = \int_0^{b'} \frac{S_z^2}{t(z')} dz'$$

при

$$t(z') = t_1 + z' \operatorname{tg} \alpha,$$

$$S(z') = \frac{t_1 z'}{2} (h - t_1) + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4} (h - 2t_1) z'^2 - \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{6} z'^3.$$

Геометрические характеристики двутаврового профиля, у которого внутренние грани полок имеют наклон (ГОСТ 8239–89)

I	tg α	I _x	max S _y	max S _ω	I _ω	μ _z	μ _y	μ _ω
		см ⁴	см ³	см ⁴	см ⁶			
10	0,1530	2,7942 (-13,0)	5,3025 (6,8)	11,890 (6,2)	386,04 (11,3)	3,0142 (11,3)	1,2593 (34,3)	0,2070 (21,8)
12	0,1361	2,8009 (-15,3)	7,1868 (8,2)	20,630 (2,1)	941,64 (7,6)	3,0480 (6,9)	1,3493 (36,4)	0,2245 (24,1)
14	0,1334	3,5122 (-15,8)	9,4855 (9,3)	30,226 (9,5)	1833,6 (16,4)	2,7395 (-1,2)	1,1819 (47,4)	0,2389 (28,2)
16	0,1370	4,5083 (-18,3)	11,974 (10,6)	43,226 (12,6)	3315,5 (20,7)	2,6501 (-3,6)	1,0914 (53,7)	0,2464 (31,8)
18	0,1305	5,5658 (-18,0)	15,252 (11,0)	71,855 (-1,9)	6971,8 (4,3)	3,2238 (15,0)	1,4023 (42,6)	0,2700 (28,2)
18a	0,1308	6,5872 (-19,6)	18,927 (12,4)	90,540 (-1,6)	9694,5 (5,2)	3,6085 (16,1)	1,2966 (47,0)	0,3011 (30,8)
20	0,1352	7,1051 (-20,9)	19,177 (12,7)	97,270 (3,6)	11564 (11,1)	3,0861 (10,1)	1,2238 (52,2)	0,2804 (33,1)
20a	0,1286	8,1987 (-21,2)	23,495 (13,4)	111,70 (5,8)	15323 (14,0)	3,2747 (7,9)	1,1217 (55,7)	0,3110 (34,6)
22	0,1317	8,1051 (-20,9)	23,872 (13,3)	127,59 (9,0)	18276 (17,9)	2,8891 (4,1)	1,0959 (58,4)	0,2905 (36,1)
22a	0,1273	8,7209 (-22,4)	28,706 (14,2)	161,09 (5,0)	25163 (13,5)	3,3176 (9,7)	1,1234 (57,0)	0,3231 (35,9)
24	0,1317	11,458 (-19,8)	28,644 (12,7)	163,23 (10,9)	26722 (19,7)	2,8099 (1,1)	1,0760 (58,1)	0,2811 (35,2)
24a	0,1273	13,370 (-20,1)	34,580 (13,2)	207,23 (6,3)	36895 (14,5)	3,2545 (7,3)	1,1184 (55,8)	0,3102 (34,3)
27	0,1290	14,199 (-20,5)	34,809 (13,2)	249,32 (-0,1)	50359 (7,2)	3,1102 (14,9)	1,3334 (50,6)	0,2930 (32,7)
27a	0,1246	16,725 (-20,6)	41,943 (13,5)	297,01 (1,6)	64598 (9,2)	3,2468 (13,2)	1,2576 (52,7)	0,3165 (33,3)
30	0,1299	18,049 (-21,3)	42,112 (13,9)	331,98 (1,4)	80298 (9,4)	2,9268 (13,6)	1,3135 (53,7)	0,2910 (34,7)
30a	0,1242	21,352 (-21,0)	50,724 (13,8)	378,09 (7,6)	97757 (16,4)	2,9166 (6,3)	1,1450 (58,3)	0,3097 (36,1)
33	0,1301	24,202 (-19,5)	50,312 (12,8)	409,15 (6,9)	112920 (15,2)	2,6184 (6,2)	1,2320 (55,8)	0,2707 (34,6)
36	0,1325	33,157 (-19,9)	59,683 (12,3)	571,09 (-1,6)	179650 (5,1)	2,8593 (15,7)	1,4751 (46,5)	0,2602 (30,5)
40	0,1311	42,937 (-18,6)	72,552 (12,1)	756,50 (-0,1)	282850 (6,8)	2,6529 (13,7)	1,4862 (47,8)	0,2526 (31,0)
45	0,1344	58,688 (-18,7)	85,299 (11,5)	960,65 (3,1)	417520 (10,2)	2,4079 (9,3)	1,4683 (49,0)	0,2307 (31,0)
50	0,1334	78,369 (-17,1)	104,13 (11,1)	1189,2 (11,9)	607920 (20,3)	2,0558 (-1,3)	1,3124 (55,4)	0,2170 (33,2)
55	0,1310	106,43 (-15,4)	128,17 (10,4)	1695,4 (5,1)	1017400 (12,2)	2,1534 (5,8)	1,5326 (48,1)	0,2115 (29,8)
60	0,1334	144,38 (-15,7)	154,94 (10,2)	2386,6 (-2,0)	1657700 (4,3)	2,3028 (13,7)	1,7760 (40,9)	0,2049 (27,7)

Интеграл I^h вычислялся по формуле Симпсона при разбиении длины полуполки на 16 равных частей.

Результаты вычислений отсутствующих в стандарте геометрических характеристик двутавровых сечений с полками, внутренние грани которых имеют наклон, сведены в таблице. Сразу за значениями вычисленных величин в круглых скобках указаны их отклонения (в процентах) от тех значений, которые получаются при замене трапециевидных полок на прямоугольные. Знак плюс у погрешности означает, что данная геометрическая характеристика у профиля с полками постоянной толщины больше. Как видно, различия между геометрическими характеристиками сопоставляемых профилей существенны, а в большинстве случаев даже очень существенны. Это, как уже отмечалось выше, объясняется в первую очередь тем, что положения центров тяжести полок швеллера (или полуполок двутавра) у трапеции и прямоугольника заметно отличаются друг от друга даже тогда, когда угол α невелик. Следовательно, заметно будут отличаться друг

от друга и значения осевых статических моментов отсеченных частей сопоставляемых сечений. А так как эти моменты входят, например, во все коэффициенты формы сечения в квадрате, то погрешность при вычислении только усугубляется.

Любопытно следующее. В задачах плоского изгиба коэффициент μ_z , который учитывает влияние формы сечения на составляющую потенциальной энергии деформации, порождаемую сдвигом, предлагается вычислять по приближенной формуле: $\mu_z = F/F^{wl}$, где F – площадь всего сечения, а F^{wl} – площадь стенки двутавра (см., например, [2; 32]). Результаты вычислений по этой формуле сильно отличаются от тех, которые приводятся в таблице. Но они прекрасно отвечают значениям коэффициента μ_z , полученным в предположении, что грани полок наклонов не имеют.

В заключение можно отметить, что для контроля все геометрические характеристики сечений со спрямленными полками вычислялись как самостоятельно, так и при помощи общих формул, в которых принималось, что угол α равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 596 с.
2. Рабинович И. М. Курс строительной механики. Ч. II. М.: Госстройиздат, 1954. 544 с.
3. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2005. 708 с.

Gol'dshteyn Yu. B., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF THIN-WALLED RODS OF OPEN PROFILE

The stress state of the rod structure is characterized by its potential deformation energy. When thin-walled rods are presented in the structure, the integral formula for this energy consists of 11 terms, and each of them contains at least one geometrical characteristic of the rods' cross-section. The state standards for rolled cross-sections, developed more than 20 years ago, do not contain all cross-section values required for modern computations. To determine characteristics that were not included into the state standards' description a few approximation formulas existing in academic and reference books are proposed. A new method of cross-section geometrical characteristics' calculation is proposed. This method takes into account the real shape of the section profile. The obtained results are compared with the results calculated by approximation formulas. Differences for the I-beams and C-beams with sloped internal faces turned out to be very significant.

Key words: geometrical characteristics, thin-walled rods, shape coefficients, sloped faces

REFERENCES

1. Perel'muter A. V., Slivker V. I. *Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost' ikh analiza* [The estimated model structures and their analysis]. Kiev, Stal' Publ., 2002. 596 p.
2. Rabinovich I. M. *Kurs stroitel'noy mekhaniki* [The course of structural mechanics]. Part II. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1954. 544 p.
3. Slivker V. I. *Stroitel'naya mekhanika. Variatsionnye osnovy* [Structural mechanics. The variational framework]. Moscow, Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov Publ., 2005. 708 p.

Поступила в редакцию 05.02.2015