УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Март, № 1 **Архитектура и строительство** **2008**

УДК 624.072.33.041.2

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ
кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета ПетрГУ
metalll@sampo.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАМНОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ СОСТАВНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Построена математическая модель, позволяющая рассчитать напряженно-деформированное состояние и проверить устойчивость рамной конструкции из составных упругопластических элементов. Переменные состояния модели учитывают изменение геометрических параметров элементов системы по длине, податливость их на изгиб, сдвиг и кручение, нелинейные геометрические и физические факторы, возникающие при работе элементов под нагрузкой.

Ключевые слова: рамная конструкция, деформированное состояние, составной упругопластический элемент

Исследуется рамная конструкция, включающая в себя составные прямолинейные элементы с ветвями, выполненными из тонкостенных профилей, соединенных между собой решеткой с образованием элемента переменного сечения по длине, имеющего две оси симметрии в поперечном сечении. Элементы рамы имеют начальные несовершенства в виде пространственно изогнутых осей. Исследование устойчивости осуществляется на примере рамной конструкции пролетом l, имеющей произвольный неразветвленный ломаный контур и загруженной по длине произвольной поперечной нагрузкой G, приложенной с эксцентриситетами относительно продольной оси. Из своей плоскости рамная система имеет жесткие опоры в узлах и между ними (в местах расположения связей). Узлы системы элементов − жесткие. Сечения элементов в узлах системы не имеют возможности поворота в своей плоскости.

В работе используется приближенное выражение для кривизны оси элементов. Для материала элементов устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжениями. Влияние разгрузки не учитывается. Используется гипотеза неплоских сечений [1]. Учет деформаций сдвига осуществляется способом, предложенным Ф. Энгессером и С. П. Тмошенко [2]. Не учитывается влияние касательных напряжений на развитие пластических деформаций. Геометрическая неизменяемость поперечного сечения элементов обеспечивается постановкой поперечных диафрагм жесткости. По торцам составных элементов рамной системы предполагается наличие опорных плит, препятствующих депланации поперечного сечения.

Первоначально, аналогично [3], исследование рамной конструкции осуществляется без учета влияния деформаций сдвига. Используется шаговое загружение конструкции. В деформированном состоянии хорда i-го элемента рамы, расположенного между узлами $i-1$ и i, повернется на угол η_i относительно первоначального положения. В этом состоянии уравнения равновесия части силовой системы, отделенной сечением, проходящим через центр узла i перпендикулярно к хорде i-го элемента, будут иметь вид:

$$R_{0y_o} - G_{y_o} - P_{i(i+1)}\cos(\upsilon_i + \eta_i) + Q_{i(i+1)}\sin(\upsilon_i + \eta_i) = 0\,,$$
$$R_{0z_o} - G_{z_o} - P_{i(i+1)}\sin(\upsilon_i + \eta_i) + Q_{i(i+1)}\cos(\upsilon_i + \eta_i) = 0\,, \quad (1)$$
$$R_{0y_o}\hat{z}_{oi} - R_{0z_o}\hat{y}_{oi} - M_i^G + M_{i(i+1)} = 0\,,$$

где R_{0y_o} и R_{0z_o} − проекции главного вектора реакций опоры с координатами $x_o = y_o = z_o = 0$ на координатные оси y_o и z_o; G_{ix_o} и G_{iy_o} − проекции главного вектора внешних сил на оси y_o и z_o; M_i^G − проекция главного момента внешних сил относительно центра узла i ; $P_{i(i+1)}$, $Q_{i(i+1)}$ − силы, действующие соответственно вдоль и поперек хорды i-го элемента со стороны элемента $i+1$; $M_{i(i+1)}$ – момент, действующий в i-м узле со стороны элемента $i+1$; υ_i - угол между осью y_o и осью i-го элемента недеформированной силовой системы; $\hat{y}_{oi}$ и $\hat{z}_{oi}$ − координаты i-го узла деформированной системы.

Координаты узлов деформированной системы элементов $\hat{z}_{oi}$ и $\hat{y}_{oi}$ определяются из выражений, учитывающих измененную вследствие деформаций длину $\hat{l}_i$ элементов системы:

$$\hat{y}_{oi} = \sum_{\hat{k}=1}^{\hat{k}=i-1} \hat{y}_{o,\hat{k}} + \hat{l}_i\cos(\upsilon_i + \eta_i)\,, \quad (2)$$
$$\hat{z}_{oi} = \hat{z}_{o,\hat{k}} + \hat{l}_i\sin(\upsilon_i + \eta_i)\,.$$

Связь между силами и моментами, действующими по разные стороны i-го узла, определится из решения системы уравнений равновесия

$$P_{i(i+1)}\cos(\upsilon_{i+1} + \eta_{i+1}) - Q_{i(i+1)}\sin(\upsilon_{i+1} + \eta_{i+1}) -$$
$$- P_{i(i+1)}\cos(\upsilon_i + \eta_i) + Q_{i(i-1)}\sin(\upsilon_i + \eta_i) = 0,$$
$$P_{i(i+1)}\cos(\upsilon_{i+1} + \eta_{i+1}) - Q_{i(i+1)}\cos(\upsilon_{i+1} + \eta_{i+1}) - \quad (3)$$
$$- P_{i(i+1)}\sin(\upsilon_i + \eta_i) - Q_{i(i-1)}\cos(\upsilon_i + \eta_i) = 0,$$
$$M_{i(i+1)} = M_{i(i-1)}\,.$$

Разделив длину i-го элемента системы на m равных частей длиной s_i, изогнутую ось i-го элемента в местной системе координат можно описать интерполяционными многочленами Лагранжа m-й степени

$$\hat{x}_{oi} = P_{m1}(z_{oi})\ ,\ \hat{y}_{oi} = P_{m2}(z_{oi})\ . \quad (4)$$

В j-м сечении i-го элемента системы прогиб будет складываться из

$$\hat{x}_{oij} = \tilde{x}_{oij} + x_{oij}\,, \hat{y}_{oij} = \tilde{y}_{oij} + y_{oij}\,, \quad (5)$$

где $\tilde{x}_{oij}$ и $\tilde{y}_{oij}$ − начальные погибы в j-ом сечении i-го элемента системы; x_{oij} и y_{oij} − прогибы в j-м сечении i-го элемента после приложения к силовой системе внешних сил.

Проведя в соответствии с [1] через точку хорды i-го элемента деформированной системы с координатой $z_{oi} = z_{oij}$ цилиндрическое поперечное сечение радиусом r_{ij} получим в волокне радиального направления деформацию

$$\varepsilon_{rij} = \varepsilon_{r0ij} + \varepsilon_{r1ij} + \varepsilon_{r2ij} + \varepsilon_{r\omega ij}\,, \quad (6)$$

где ε_{r0ij} , ε_{r1ij} и ε_{r2ij} − деформации, возникающие от действия соответственно продольной силы N_{ij}, изгибающих моментов M_{xij} и M_{yij}; $\varepsilon_{r\omega ij}$ − деформация, возникающая при стесненном кручении [4].

С учетом (5) относительные деформации в радиальном направлении определятся по формулам:

$$\varepsilon_{roij} = \varepsilon_{oij}\cos\beta\ ,$$
$$\varepsilon_{r1ij} = -y''_{oij}r_{ij}\sin 2\beta/2\,,\ \varepsilon_{r2ij} = -x''_{oij}x\,, \quad (7)$$
$$\varepsilon_{r\omega ij} = -\psi''_{ij}\omega_{rij}\,,$$

где A_{rij} − площадь поперечного j-го цилиндрического сечения i-го элемнта ; β − угол между направлением рассматриваемого волокна и плоскостью $x0z$; ω_{rij} − секториальная координата точки контура j-го цилиндрического сечения i-го элемента.

Угол ψ_{ij} определяется как сумма приращений углов поворота сечений i-го элемента системы начиная от сечения с координатой $z_{oi} = 0$.

$$\psi_{ij} = \sum_{k=1}^{k=j}(\Delta M_{itz_kk}\sum_{g=1}^{g=\bar{k}}\psi_{1tg})\,, \quad (8)$$

где ΔM_{itz_kk} − приращение крутящего момента по длине k-го участка i-го элемента системы относительно оси, проходящей через центр изгиба сечения; ψ_{1tg} − угол закручивания g-й пространственной панели k-го участка элемента от действия единичных крутящих моментов, приложенных по ее торцам, определяемый аналогично [6] с учетом развития пластических деформаций [7]; $\bar{k}$ − число панелей на k-ом участке.

Выражение для определения ψ''_{ij} аппроксимируем интерполяционным многочленом

$$\psi''_{ij} = \sum_{k_1=-2}^{k_1=+2} D_{ij+k_1}\psi_{ij+k_1} \quad (9)$$

Условия равновесия для части i-го элемента, отделенной j-м сечением элемента, в проекциях на центральные оси инерции этого сечения x_1, y_1 и z_1 параллельные координатным осям x_{oi}, y_{oi} и z_{oi} с учетом деформированного состояния элемента запишутся в виде:

$$
\begin{gathered}
P_{i(i+1)}\widehat{y}_{oij}-M_{i(i+1)}+Q_{i(i+1)}\widehat{z}_{oij}-M^{G}_{ijx_1}+M^{\text{‰}'}_{ijx}\cos\xi_{ij2}\cos\psi_{ij}-M^{\text{‰}'}_{ijy}\cos\xi_{ij3}\sin\psi_{ij}-M^{\text{‰}'}_{ijz}\cos\xi_{ij1}\sin x'_{oij}=0,\\
P_{i(i+1)}\widehat{x}_{oij}-M^{\overline{R}}_{ijy_1}+M^{\text{‰}'}_{ijx}\cos\xi_{ij2}\sin\psi_{ij}-M^{\text{‰}'}_{ijy}\cos\xi_{ij3}\cos\psi_{ij}-M^{\text{‰}'}_{ijz}\sin\xi_{ij1}=0,\\
Q_{i(i+1)}\widehat{x}_{oij}\pm M^{G}_{ijz_1}-M^{\text{‰}'}_{ijx}\sin\xi_{ij2}+M^{\text{‰}'}_{ijy}\sin\xi_{ij3}-M^{\text{‰}'}_{ijz}\cos\xi_{ij1}\cos x'_{oij}=0,\\
\pm\overline{R}_{ijx_1}\mp Q^{\text{‰}'}_{ijx}\cos\xi_{ij2}\cos\psi_{ij}\pm Q^{\text{‰}'}_{ijy}\cos\xi_{ij3}\sin\psi_{ij}\pm P^{\text{‰}'}_{ij}\cos\xi_{ij1}\sin x'_{oij}=0,\\
Q_{i(i+1)}-G_{ijy_1}\mp Q^{\text{‰}'}_{ijx}\cos\xi_{ij2}\sin\psi_{ij}\pm Q^{\text{‰}'}_{ijy}\cos\xi_{ij3}\cos\psi_{ij}\pm P^{\text{‰}'}_{ij}\sin\xi_{ij1}=0,\\
P_{i(i+1)}\mp Q^{\text{‰}'}_{ijx}\sin\xi_{ij2}\pm Q^{\text{‰}'}_{ijy}\sin\xi_{ij3}\pm P^{\text{‰}'}_{ij}\cos\xi_{ij1}\cos x'_{oij}=0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $\xi_{ij1}=y'_{oij}[1-(x'_{oij})^2/2]$, $\xi_{ij2}=x'_{oij}[1-(\psi_{ij})^2/2]$, $\xi_{ij3}=y'_{oij}[1-(\psi_{ij})^2/2]$, G_{ijy_1} − проекция главного вектора внешних сил, действующих на i-й элемент системы; $M^{G}_{ijx_1}$ и $M^{G}_{ijz_1}$ − проекции вектора главного момента внешних сил относительно центра тяжести j-го сечения i-го элемента системы на оси соответственно x_1 и z_1; $P^{\text{‰}'}_{ij}$ − главный вектор эпюры нормальных напряжений j-го сечения i-го элемента системы; $M^{\text{‰}'}_{ijx}$ и $M^{\text{‰}'}_{ijy}$ − проекции вектора главного момента эпюры нормальных напряжений j-го сечения i-го элемента системы относительно центра тяжести этого сечения на главные центральные оси инерции; $M^{\text{‰}'}_{ijz}$ − главный вектор касательных сил j-го сечения i-го стержня; $Q^{\text{‰}'}_{ijx}$ и $Q^{\text{‰}'}_{ijy}$ − проекции главного вектора эпюры касательных напряжений изгиба на главные центральные оси инерции; $\overline{R}_{ijx_1}$ − главный вектор горизонтальных опорных реакций; $M^{\overline{R}}_{ijy_1}$ − проекция главного момента от действия горизонтальных опорных реакций на ось y_1 j-го сечения i-го элемента системы.

Внутренние силы j-го сечения в (10) определятся из

$$
\begin{aligned}
P^{\text{‰}'}_{ij}&=r_{ij}\int\limits_{A_{rij}}\sigma_{rij}\cos\beta dA_{rij},\\
M^{\text{‰}'}_{ijx}&=r_{ij}\int\limits_{A_{rij}}\sigma_{rij}\,y\cos\beta dA_{rij},\\
M^{\text{‰}'}_{ijy}&=\int\limits_{A_{rij}}\sigma_{rij}\,x\cos\beta dA_{rij}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Уравнения, раскрывающие статическую неопределимость задачи, будут иметь вид:

$$
y'_{o1o}=0,\ y'_{okm}=0,\ l=const. \tag{12}
$$

При составлении выражения для l в (12) учитывается то, что длина стержней деформированной системы с учетом деформаций изгиба, осевого растяжения-сжатия равна

$$
\widehat{l}_i=l_i+\Delta l_i,\ \Delta l_i=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{l_i}(y'_{oi})^2dx_{oi}+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{l_i}\varepsilon_{oi}dx_{oi}. \tag{13}
$$

Используя (1) − (13), решается задача определения напряженно-деформированного состояния рамной конструкции без учета деформаций сдвига.

Учет деформаций сдвига дает следующие углы поворота сечений

$$
\begin{gathered}
\overline{y}'_{oij}=y'_{oij}+\overline{Q}^{\,вн}_{ijy}\widehat{\gamma}_{1yj},\ \overline{x}'_{oij}=x'_{oij}+Q^{вн}_{ijx}\widehat{\gamma}_{1xj},\\
\overline{Q}^{\text{‰}'}_{ijy}=Q^{\text{‰}'}_{ijy}\pm\int\limits_{A_{rij}}\sigma_{rij}\sin\beta dA_{rij},
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где $\widehat{\gamma}_{1xj}$ и $\widehat{\gamma}_{1yj}$ - усредненные углы поперечного сдвига j-го сечения в главных плоскостях инерции на j-м участке системы от действия единичных поперечных сил, определяемые из рассмотрения картины деформации пространственной панели составного элемента с учетом влияния пластических деформаций [7].

Зная $\overline{y}'_{oij}$, $\overline{x}'_{oij}$ и используя формулы численного анализа [9], можно найти величины $\overline{y}_{oij}$ и $\overline{x}_{oij}$. После подстановки их в (10) вместо величин $y_{oij}, y'_{oij}, x_{oij}, x'_{oij}$ и учета влияния деформаций сдвига в выражениях (2) и (13) задача устойчивости рамной конструкции решается методом, изложенным в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верховский А. В. Новый способ определения напряжений в деталях сложной формы (метод неплоских сечений) // Тр. Горьковского политехн. института. Вып. 1. Горький, 1951. Т. IX. 102 с.
2. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л. : ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. С. 133.
3. Рочев А. А. Математическая модель упругопластического составного элемента несущей конструкции // Труды ПетрГУ. Сер. Прикладная мат. и информатика. Вып. 12. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2007. С. 55–61.
4. Борисов М. Д. Расчет на кручение балочных и рамных систем из тонкостенных составных стержней на планках. Л.: Стройиздат,1970. 150 с.
5. Трофимов В. И. Исследование устойчивости трехгранных сквозных стержней // Исследования по стальным конструкциям: Тр. ЦНИИСК. М.: Стройиздат, 1962. Вып.13. С. 173.
6. Рочев А. А. Исследование устойчивости стальных перфорированных внецентренно сжатых стержней в упругопластической стадии // Металлические конструкции и испытания сооружений: межвузовский тематический сборник трудов. Л.: ЛИСИ, 1977. №1(134). С. 119–123.
7. Санжаровский Р. С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 280 с.
8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2 т. М.: Наука, 1966. Т. 1. 632 с.