УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Сентябрь, № 3 **Технические науки** **2008**

УДК 624.042.8:534.1

АНАТОЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ КОЙБИН
кандидат технических наук, доцент кафедры механики строительного факультета ПетрГУ
kabs@karelia.ru

ПРОДОЛЬНЫЕ ВИБРАЦИИ В ДВУХСЛОЙНОМ СТЕРЖНЕ ПРИ НАЛИЧИИ МЕЖДУ СЛОЯМИ СУХОГО ТРЕНИЯ

В статье рассматривается задача о вынужденных продольных колебаниях в составном стержне под воздействием гармонических возмущений и взаимодействия между слоями сухим трением.

Ключевые слова: продольные вибрации, стержень, трение

Стержень состоит из двух однородных слоев, прижатых друг к другу равномерно распределенным постоянным давлением.

1. Исследуем распространение продольных вибраций в каждом из слоев составного стержня конечной длины при воздействии гармонических возмущений частоты ω. Для контактных поверхностей полагаем справедливым закон Кулона, а для материала стержня – закон Гука [4]. Поставленная задача решается с использованием приближенных методов гармонической линеаризации и разложений по малому параметру. Уравнения динамики слоев имеют вид:

$$\rho Q_j \ddot{u}_j - E Q_j u_j'' = (-1)^j q\, sign(\dot{u}_1 - \dot{u}_2). \quad j = 1,2 \qquad (1.1)$$

Здесь ρ – плотность материала, Q_1 и Q_2 – площади сечений слоев, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – смещения слоев стержня, q – сила трения, отнесенная к единице длины контакта стержня, E – модуль упругости. Штрихом и точкой обозначены частные производные по координате x и времени t. Полагаем, что относительные вибрации $\eta(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ распространяются на всю длину составного стержня. Условия, обеспечивающие это допущение, определим ниже. Рассматривая стационарные колебания, решение для относительных смещений будем искать в виде

$$\eta(x,t) = a(x) cos(\omega t + \varphi(x)) \cdot \qquad (1.2)$$

Предварительно, следуя методу гармонической линеаризации, нелинейную функцию в системе (1.1) заменим линейной

$$F(\dot{\eta}) = sign\, \dot{\eta}(x,t) = r\omega^{-1}\dot{\eta}(x,t) \cdot \qquad (1.3)$$

Здесь коэффициент линеаризации r вычислен по формуле [3] и имеет вид

$$r = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(-a\omega \sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi a}. \qquad (1.4)$$

Заменяя нелинейные функции в системе (1.1), получим

$$\ddot{u}_j - c^2 u_j'' = (-1)^j q_j \dot{\eta}/a\omega \quad q_j = 4q/\rho Q_j \pi, \qquad (1.5)$$

© Койбин А. В., 2008

$$\ddot{\eta}-c^2\eta''=-(q_1+q_2)\dot{\eta}/a\omega \qquad c^2=E/\rho, \quad (1.6)$$

Решение системы (1.5–1.6) будем искать в комплексной форме, что стало возможно после линеаризации задачи: физический смысл имеет вещественная часть решения. Для общности и удобства вычислений предварительно перейдем к безразмерным величинам. Введем обозначения

$$|Z|=R,\ \alpha=\omega/c,\ y=\alpha x,$$
$$K_j=q_j/\omega^2,\ K=(q_1+q_2)/\omega^2. \quad (1.7)$$

Решения системы (1.5–1.6) будем искать в виде

$$\eta=KZ\exp(i\omega t),\ u_2=K_2D\exp(i\omega t),$$
$$u_1=\eta+u_2,\ |KZ|=a. \quad (1.8)$$

После подстановки искомых решений в систему и принятых обозначений получим для комплексных амплитуд Z и D:

$$Z''+Z=iZ/|Z|,\quad D''+D=-iZ/|Z| \quad (1.9)$$

(Штрихом в уравнениях обозначены производные по координате y.)

Решение первого уравнения системы (1.9) для комплексной амплитуды Z относительных смещений будем строить методом вариации произвольных постоянных. За порождающее решение примем решение уравнения без правой части

$$Z=A_1\exp(i\xi_1)+A_2\exp(-i\xi_2),\ \xi_j=y+\varphi_j, \quad (1.10)$$

где $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ – постоянные интегрирования. Полагая постоянные функциями координаты y и накладывая дополнительные условия на производные (1.11):

$$A_1'\exp(i\xi_1)+A_2'\exp(-i\xi_2)+$$
$$+A_1i\varphi_1'\exp(i\xi_1)-A_2i\varphi_2'\exp(-i\xi_2)=0. \quad (1.11)$$

Подставим искомое решение (1.10) в первое уравнение (1.9) и с учетом (1.11) получим систему уравнений для отыскания функций:

$$A_j'=(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial A_j},\ \varphi_j'=(-1)^{j+1}\frac{1}{2A_j^2}\frac{\partial R}{\partial \xi_j}$$
$$R=(A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\xi)^{1/2},$$
$$\xi=\xi_1+\xi_2,\ R=|Z|. \quad (1.12)$$

Найти непосредственно решение системы (1.12) в замкнутом виде не удается. Для разрешения системы воспользуемся методом усреднения. В работах Миронова и Пальмова показано, что при слабом демпфировании в рассматриваемом случае можно считать колебания медленно меняющимися как по координате, так и по времени [2], [3]. Поэтому целесообразно в системе провести усреднение по быстрой переменной ξ, при этом предполагается медленное изменение переменных A_1, A_2, φ_1 и φ_2. Для проведения усреднения в системе (1.12) возьмем среднеквадратическое значение функции R.

$$\langle R\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R^2d\xi\right)^{1/2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}. \quad (1.13)$$

После подстановки $\langle R\rangle$ в (1.12) усредненная система примет вид

$$A_j'=(-1)^{j+1}A_j/2\langle R\rangle,\ \varphi_1'=0,,\ \varphi_2'=0. \quad (1.14)$$

Данная система имеет интегралы

$$\varphi_1=c_3,\ \varphi_2=c_4,\ A_1A_2=c_2,$$
$$(A_1')^2+(A_2')^2=1/4. \quad (1.15)$$

Однако получить в явном виде зависимость A_1 и A_2 от y в элементарных функциях не удается. Как следует из интегралов (1.15), зависимость между A_1 и A_2 определяется равнобочной гиперболой и при приложении возмущения реализуется одна из ветвей гиперболы. При этом отношение

$$\varepsilon=A_1/A_2=c_2/A_2^2 \quad (1.16)$$

будет изменяться от единицы при $x = l$, где $A_1=A_2$, $\xi_1+\xi_2=0$, и резко уменьшаться при изменении величин A_1 и A_2, то есть $1\geq\varepsilon>0$. В этом можно убедиться после вычисления постоянных интегрирования, которые будут определены далее. Если уравнения системы (1.14) разложить по параметру ε, учитывая величины не выше ε, придем к системе

$$A_1'=A_1/2A_2,\ A_2'=-1/2,\ \varphi_1'=0,\ \varphi_2'=0. \quad (1.17)$$

Введенный параметр ε делает систему (1.17) близкой к системе (1.14). Действительно, при ε=1 система (1.17) перейдет в систему (1.14), а при малых значениях ε – вследствие ее малой величины. Система (1.17) имеет решение

$$A_2=c_1-y/2,\ A_1=c_2/(c_1-y/2),$$
$$\varphi_1=c_3,\ \varphi_2=c_4. \quad (1.18)$$

При этом для амплитуды относительного смещения $R=|Z|$ с учетом отношения (1.16) можно записать:

$$R=c_1-y/2+c_2/(c_1-y/2)\cos(2y+c_3+c_4). \quad (1.19)$$

Для определения выражений для смещения слоев стержня u_1 и u_2 обратимся к системе (1.9). Если ввести переменные $V=Z+D$ и $D=V-Z$, то получим дифференциальное уравнение для V:

$$V''+V=0. \quad (1.20)$$

Уравнение имеет решение

$$V=c_7\exp(\xi_3)+c_8\exp(-\xi_4), \quad (1.21)$$

$$\xi_3 = y + c_5,\ \xi_4 = y + c_6.$$

Тогда для функций u_1 и u_2 можно записать решение в комплексной форме

$$u_1 = (KZ + K_2 D)\exp(i\omega t),$$
$$u_2 = K_2(V - Z)\exp(i\omega t). \qquad (1.22)$$

Входящие в эти перемещения функции определены выше. Они содержат постоянные интегрирования c_j, которые должны быть определены из граничных условий. Граничные условия для такого составного стержня могут быть весьма разнообразны. Рассмотрим составной стержень длины l. При этом предполагаем, что относительные вибрации между слоями будут распространяться на всю длину стержня. Зададим кинематические граничные условия в комплексной форме

$$u_1(0,t) = H_1\exp(i\omega t),$$
$$u_2(0,t) = H_2\exp(i\omega t), \qquad (x=0) \qquad (1.23)$$
$$u_1(l,t) = 0,\ u_2(l,t) = 0. \qquad (x=l)$$

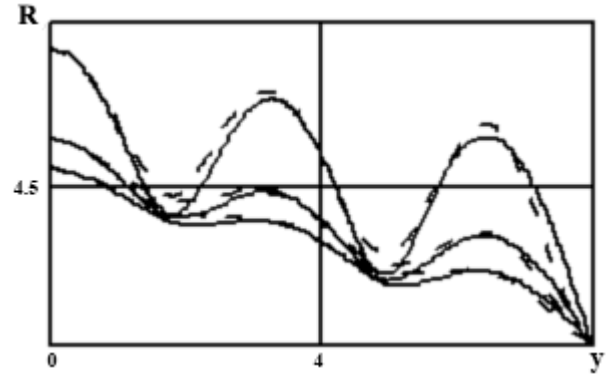
Из этих граничных условий определяются постоянные интегрирования.

$$c_3 + c_4 = -2L,\ c_5 + c_6 = -2L,$$
$$c_2 = -(c_1 - L/2)^2,\ c_7 = -c_8,\ c_7 = \lambda/2\sin L,$$
$$\lambda = (H_2Q_2 + H_1Q_1)\omega^2\pi\rho Q_2/4(Q_1+Q_2)q,$$
$$tgc_3 = c_1^2\sin 2L/s, \qquad (1.24)$$
$$s = (c_1 - L/2)^2 - c_1^2\cos 2L,\ tgc_5 = ctgL,$$
$$L = \alpha l,\ H = (H_1 - H_2)/K,$$
$$c_1^2 + (c_1 - L/2)^4/c_1^2 - 2(c_1 - L/2)^2\cos 2L = H.$$

Постоянная интегрирования c_1 определяется из последнего выражения системы (1.24) численным методом или из приближенного выражения при учете отношения (1.16):

$$c_1 - (c_1 - L/2)^2\cos(2L)/c_1 = H. \qquad (1.25)$$

Выражение (1.25) получено из (1.19), определяющего равенство амплитуды относительного смещения и амплитуды относительного возмущения на конце стержня, при $x=0$. При этом берется значение $c_1 > 0$. Сравним полученное решение для амплитуды относительного смещения R(y) с результатом численного интегрирования первого уравнения системы (1.9). На фиг. 1 представлены зависимости R(y) в безразмерной форме. Сравнение выполнено при одинаковых граничных условиях и постоянном по длине давлении для нескольких значений амплитуд возмущающих воздействий на конце стержня при условии, что вибрации распространяются по всей длине рассматриваемого стержня. Сплошными линиями показаны результаты численного интегрирования, штриховыми – приближенного решения. Из представленной графической зависимости видно, что расхождение невелико.



Фиг. 1

2. Определим параметры системы и внешнего воздействия, обеспечивающие распространение относительных вибраций на всю длину l рассматриваемого стержня. Для этого рассмотрим полубесконечный стержень с кинематическим граничным условием

$$\eta(0,t) = (H_1 - H_2)\exp(i\omega t). \quad (x=0) \qquad (2.1)$$

Решение для относительных смещений будем искать также в виде (1.2). В рассматриваемом случае удается найти решение [4], содержащее две постоянные интегрирования c_1, c_2 и удовлетворяющее убыванию амплитуды с ростом x. Для комплексной амплитуды относительных смещений решение уравнения (1.9), тождественно удовлетворяющее ему, имеет вид:

$$Z = (c_1 - y/2)\exp(-i(y + c_2)). \qquad (2.2)$$

Тогда для относительных смещений в действительной форме запишем

$$\eta(x,t) = K(c_1 - y/2)\cos(\omega t - y - c_2). \qquad (2.3)$$

Удовлетворяя граничному условию (2.1), постоянные интегрирования примут значения $c_1 = (H_1 - H_2)/K,\ c_2 = 0$, а зона распространения относительных вибраций определится из условия положительности амплитуды

$$x_* = 1/2(H_1 - H_2)c\omega\pi\rho Q_1Q_2q^{-1}(Q_1+Q_2)^{-1}. \qquad (2.4)$$

Следовательно, решение (2.3) справедливо для значений $0 < x \le x_*$. При $x > x_*$ следует принять $\eta(x,t) = 0$, то есть сечения Q_1 и Q_2 будут совершать вибрации совместно без относительных смещений слоев. Заметим, что если $q \to 0$, координата $x_* \to \infty$, что соответствует отсутствию демпфирования. При больших значениях q вибрации локализируются около возмущенного конца стержня. Как следует из (2.4), величина x_* зависит от частоты воздействия ω. Поэтому для распространения вибраций на длину стержня l необходимо значение частоты, равной не менее $\omega = \omega_*$.

$$\omega_* = 2q(Q_1+Q_2)l/(H_1-H_2)c\pi\rho Q_1Q_2. \qquad (2.5)$$

Следовательно, если проследить за вибрациями в составном стержне длиной l при изменении частоты от нуля до частоты $\omega > \omega_*$, то сначала необходимо воспользоваться решением (2.3), а при достижении частоты до $\omega = \omega_*$ – решением для системы (1.12). Далее отметим, что если в исходной системе заменить $u_2 = 0$, а $\eta(x,t) = u_1(x,t)$, то автоматически получим решение задачи о распространении вибраций в стержне конечной длины, прижатом к неподвижной шероховатой поверхности [1].

3. Рассмотрим необратимые потери в составном стержне при вибрациях составного стержня. Эти потери могут быть определены как работа сил трения на относительном смещении слоев по длине стержня за период возмущающего воздействия:

$$W = \int_0^x \int_0^{2\pi/\omega} F_{Tp} \frac{\partial \eta}{\partial t} dt dx. \qquad (3.1)$$

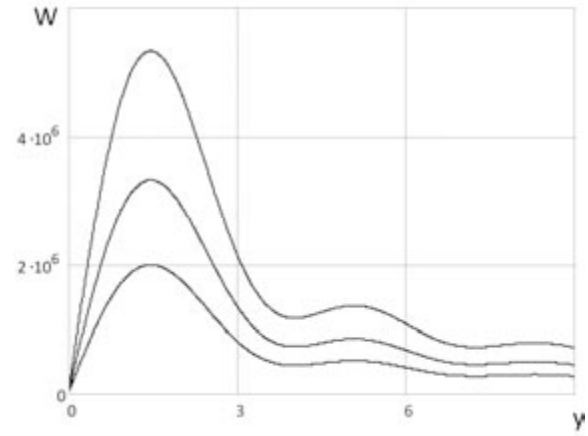
Силу трения возьмем с учетом ее линеаризации в виде

$$F_{Tp} = -q\,sign\,\dot{\eta} = \frac{4q\dot{\eta}}{\pi K R \omega}. \qquad (3.2)$$

Вычисление потерь по формуле (3.1) дает выражение

$$W = 4qK\int_0^x R(y)dx = \frac{4qK}{\alpha} S(y). \qquad (3.3)$$

Здесь $S(y)$ – площадь под графиком для амплитуды относительных смещений, ограниченной координатой $y = \alpha x$, при фиксированном значении x, равном значению длины L рассматриваемого стержня. На фиг. 2 представлено несколько зависимостей потерь на трение от координаты $y = \omega L/c$ для различных значений величины силы трения q. Зависимости показывают, что потери существенно зависят от величины трения и частоты внешнего воздействия ω.



Фиг. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Койбин А. В. Распространение вибраций в коротком упругом стержне при наличии сухого трения // Изв. АН МТТ. 1986. № 6. С. 170–173.
2. Миронов М. В. О распространении в стержнях продольных колебаний с медленно меняющимися параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 91–96.
3. Пальмов В. А. Распространение вибраций в нелинейной диссипативной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 749–756.
4. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.