

УДК 519.61

**ГЕННАДИЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛЕСНИКОВ**доктор технических наук, профессор кафедры механики ПетрГУ  
*kgn@sampo.ru***ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КУВШИНОВ**соискатель кафедры механики ПетрГУ  
*dak@ptz.ru***ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОГО  
МЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОПРИЕМНИКА  
И КОНТАКТНОЙ СЕТИ ПРИ ВЫСОКОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОВОЗА**

В статье рассматривается методика численного моделирования контактной сети и токоприемника электровоза как механической системы с полуконтактным взаимодействием элементов. Для моделирования такого взаимодействия используются связи, сопротивляющиеся только сжатию. На модельных примерах рассмотрено изменение силы контактного взаимодействия в зависимости от скорости движения электровоза.

Ключевые слова: численное моделирование, механическая система, контактное взаимодействие

*Введение.* В современных условиях содержанием одного из направлений развития электрифицированного железнодорожного транспорта в целях улучшения его технико-экономических характеристик является обеспечение экономичного и надежного функционирования систем «токоприемник – контактная сеть» при достаточно большой скорости движения поездов. В этой связи появляется ряд актуальных проблем, относящихся как к совершенствованию известных инженерных решений, так и к созданию новых систем названного выше вида, что предопределяет необходимость все более детального их исследования [15]. Комплексное исследование степени влияния различных факторов на характеристики систем «токоприемник – контактная подвеска», безусловно, требует проведения экспериментов. Однако по техническим и экономическим условиям проведение таких экспериментов возможно при ограниченном наборе конструктивных и технологических характеристик. В этой связи становится не только целесо-

образным, но и необходимым применение соответствующих математических моделей и современной вычислительной техники. Основным направлением в изучении рассматриваемых систем является математическое моделирование с применением численных методов [7; 22].

Применение методов математического моделирования позволяет решать достаточно сложные задачи, в которых, например, учитывается, что при определенных условиях (недостаточная сила начального нажатия токоприемника, колебания токоведущего провода в вертикальной плоскости и т. д.) возможен кратковременный однократный или повторяющийся разрыв электрической цепи вследствие появления зазора между токоприемником и токоведущим проводом. При этом имеет место повышенный электроэрозионный износ контактирующих элементов. Можно избежать появления зазоров, увеличивая силу начального нажатия токоприемника. Однако увеличение силы контактного взаимодействия приводит, соответственно, к увеличению силы трения и ускоре-

нию по этой причине износа контактирующих элементов. Таким образом, очевидна необходимость постановки и решения соответствующей оптимизационной задачи, для чего нужны адекватные математические модели и алгоритмы их компьютерной реализации.

Известны математические модели механических систем рассматриваемого класса, разработанные с применением метода конечных элементов и метода конечных разностей (см., например, [8; 6]). При разработке и компьютерной реализации таких моделей появляется ряд проблем. Наибольшие затруднения обусловлены необходимостью учета возможности появления зазоров между токоприемником и контактным проводом при некоторой скорости движения электропоезда. Имеет место конструктивная нелинейность, так как структура механической системы в данный момент времени зависит от того, закрыт или открыт зазор. Решение задачи может быть найдено с использованием методов нелинейной механики [19], например по схеме последовательных нагружений [14].

Нами была предложена методика расчета, в которой применен прямой алгоритм решения задачи на каждом шаге по времени, что достигается использованием соответствующей разностной схемы [10; 11]. Методика предназначена, в частности, для исследования изменения силы контактного взаимодействия полоза токоприемника электровоза и токоведущего провода контактной сети. Сила контактного взаимодействия токоприемника с токоведущим проводом заранее неизвестна и подлежит определению как один из результатов решения задачи. Особенность алгоритма заключается в том, что стандартные зависимости метода конечных элементов дополнены соотношениями для сил контактного взаимодействия и величин зазоров, аналоги дифференциальных уравнений движения записаны с использованием односторонних конечных разностей, а расчет на шаге по времени сведен к линейной задаче дополненности, для решения которой применен известный алгоритм [12; 17].

Для обеспечения стабильного качества тока сьема по всей длине токоведущего провода амплитуда его поперечных колебаний не должна быть избыточно большой, в том числе при автоколебаниях [22]. Амплитудой поперечных колебаний провода можно управлять, изменяя силу его натяжения. На модельной задаче нами была рассмотрена методика исследования взаимовлияния поперечных и продольных колебаний токоведущего провода контактной сети в зависимости от силы натяжения. Задача решается с применением численных методов [11].

*1. Математическая модель.* Современное состояние и развитие методов расчета механических систем с контактным взаимодействием элементов отражено в нескольких работах [16], [24], [5], [1], [9], [3]. В данном случае при построении математической модели использованы

стандартные соотношения метода конечных элементов в форме метода перемещений, в которых учтены изгиб в вертикальной плоскости и продольные деформации стержней [20]. Токоведущий провод и поддерживающие его фрагменты контактной сети разбиваются на элементы конечной длины. Уравнения движения записываются с учетом сил упругого и вязкого сопротивления в стандартной форме. При этом длина каждого из элементов принимается достаточно малой, что позволяет, используя известную методику [2], исключить из рассмотрения вращательные степени свободы.

С физической точки зрения модель контактного провода представляет собой упорядоченное множество масс, сосредоточенных в узлах и соединенных упругими элементами. Продольная и поперечная жесткость каждого из стержней определяется геометрическими характеристиками его поперечного сечения и свойствами материала. В рассматриваемой модели каждая из масс (которые в данном случае могут рассматриваться как материальные точки) имеет две степени свободы.

В матричной форме уравнение движения рассматриваемой механической системы с полуконсервативным взаимодействием элементов имеет следующий вид:

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{r}\mathbf{U} - \mathbf{P} - \mathbf{CN}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица масс,  $\mathbf{K}$  – матрица, учитывающая диссипацию энергии,  $\mathbf{r}$  – матрица жесткости,  $\mathbf{P}$  – вектор узловых сил,  $\mathbf{U}$  – вектор перемещений узлов конечно-элементной модели. Элементы вектора  $\mathbf{R}$  представляют собой реакции фиктивных связей метода конечных элементов в форме метода перемещений. Эти реакции равны нулю.

Соотношение (1) отличается от стандартной формулировки метода конечных элементов [20], [2] компонентом  $\mathbf{CN}$ , которым в нашем случае учитывается влияние сил контактного взаимодействия. Эти силы представлены элементами вектора  $\mathbf{N}$ . Здесь  $\mathbf{C}$  – матрица коэффициентов в уравнениях равновесия.

Перемещения  $\mathbf{U}$ , текущие и начальные значения зазоров ( $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{D}_0$  соответственно) связаны между собой геометрическими соотношениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} + \mathbf{D}_0. \quad (2)$$

По физическому смыслу задачи уравнения (1) и (2) необходимо дополнить следующими выражениями:

$$\mathbf{R} = 0, \mathbf{D}^T \mathbf{N} = 0, \mathbf{D} \geq 0, \mathbf{N} \geq 0. \quad (3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к поиску решения системы равенств и не-

равенств (1–3), то есть исходная задача формулируется как линейная задача дополнительно-сти. Достаточно эффективный в вычислительном отношении алгоритм решения задачи может быть построен с использованием разработанного ранее подхода [12], [17].

Применяя явную схему с односторонними конечными разностями, заменим соотношения (1–3) их конечно-разностными аналогами:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \mathbf{A}\mathbf{U}_i - \mathbf{C}\mathbf{N}_i + \hat{\mathbf{P}}_i \\ \mathbf{D}_i &= \mathbf{C}^T\mathbf{U}_i + \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{R}_i &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{D}_i^T\mathbf{N}_i = 0; \quad \mathbf{D}_i \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{N}_i \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}\tau^{-2} + \mathbf{K}\tau^{-1} + \mathbf{r}, \\ \hat{\mathbf{P}}_i &= \tau^{-2}\mathbf{M}\mathbf{U}_{i-2} - \mathbf{B}\mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{M}\tau^{-2} + \mathbf{K}\tau^{-1}, \end{aligned}$$

$\tau$  – шаг по времени,  $i$  – номер шага.

Первые два соотношения запишем в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{N}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_i \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}.$$

Используя жордановы исключения в блочной форме, переведем все переменные, обязательно равные нулю, в правую часть данного равенства. Эти переменные представлены всеми элементами блока  $\mathbf{R}_i$  и некоторыми (неизвестными заранее) элементами блоков  $\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{N}_i$ . Переведем  $\mathbf{R}_i$  в правую часть. Получим:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{N}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i \\ \mathbf{D}_0 - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i &= \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{N}_i + \mathbf{D}_0 - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i \\ \mathbf{D}_i^T\mathbf{N}_i &= 0; \quad \mathbf{D}_i \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{N}_i \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{D}_i; \quad \mathbf{X} = \mathbf{N}_i; \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}; \\ \mathbf{W} &= \mathbf{D}_0 - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i. \end{aligned}$$

Тогда, очевидно,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{W}.$$

По физическому смыслу рассматриваемой задачи матрица коэффициентов  $\mathbf{H}$  квадратная,

положительно определенная. Для неизвестных переменных выполняется соотношение:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{X} = 0; \quad \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Тем самым на шаге  $i$  по времени приходим к известной формулировке линейной задачи дополнительно-сти [23].

Заметим, для решения рассматриваемой контактной задачи могут быть использованы различные алгоритмы [24], [3], [16]. В данном случае эффективным в вычислительном отношении является применение алгоритма с энергетическим критерием выбора разрешающей строки [12], [17].

Решив линейную задачу дополнительно-сти, найдем  $\mathbf{D}_i$  и  $\mathbf{N}_i$  на шаге  $i$  по времени. Затем определим перемещения узлов конечно-элементной модели:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}_i + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{N}_i + (-\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i).$$

Касательную составляющую силы контактного взаимодействия токоведущего провода и токоприемника определим, используя закон Амонта – Кулона  $T = fN$ , где  $f$  – коэффициент трения,  $N$  – нормальная составляющая силы контактного взаимодействия.

2. *Алгоритм решения.* Для численной реализации математической модели разработан алгоритм, который может быть представлен в следующем виде.

1. С использованием метода последовательных приближений [19], [14] определяется деформированное состояние провода, на который действуют сила собственного веса, сила натяжения и сила начального нажатия токоприемника. Таким образом, решается задача статики с учетом геометрической нелинейности по аналогии с [22], [11].

2. Для определения перемещений узлов конечно-элементной модели используется явная схема с односторонними конечными разностями. На первом шаге по времени в качестве исходного принимается состояние статического равновесия, найденное по п. 1.

3. На очередном шаге по времени  $i$  в качестве исходного состояния принимается состояние объекта исследования, найденного на предыдущем шаге  $i - 1$ . Решается линейная задача дополнительно-сти с целью определения зазоров  $\mathbf{D}_i$ , нормальных составляющих сил контактного взаимодействия полза токоприемника и токоведущего провода  $\mathbf{N}_i$ , перемещений узлов конечно-элементной модели  $\mathbf{U}_i$ .

4. Касательные составляющие сил контактного взаимодействия на шаге  $i$  вычисляем, используя найденные на предыдущем шаге значения нормальных сил:

$$\mathbf{T}_i = f \mathbf{N}_{i-1}.$$

5. Найденные перемещения  $U_i$  используем для нахождения новых значений координат узлов конечно-элементной модели и пересчета матрицы жесткости системы. Каждый шаг по времени сопровождается перемещением токоприемника на расстояние, равное длине конечного элемента токоведущего провода по направлению движения электровоза. Изменение геометрической схемы объекта моделирования учитывается пересчетом как матрицы жесткости, так и элементов матрицы  $C$ .

6. В качестве критерия остановки счета используется число шагов по времени. Точность такого расчета приемлема, если величина шага по времени достаточно мала.

3. *Модельный пример.* Объект исследования схематически представлен на рис. 1.

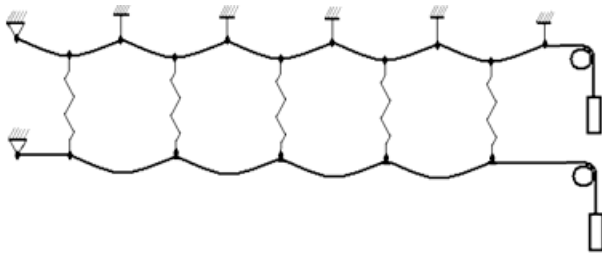


Рис. 1. Модель участка контактной сети

За основу модели взята плоская схема замещения пространственной ромбовидной автокомпенсированной контактной сети (ПРАКС) [7; 21]. Несущий трос и токоведущий провод закреплены шарнирно-неподвижно в начале первого пролета. Промежуточные опоры несущего троса рассматриваются как примыкающие шарнирно-подвижные опоры. Несущий трос и токоведущий провод связаны упругими элементами, обладающими жесткостью 3,6 кН/м. Пролеты токоведущего провода и несущего троса одинаковы, равны 10 м. Натяжение токоведущего провода и несущих тросов создается противовесами. Сила натяжения троса 24 кН, провода – 19,6 кН. Несущий трос и токоведущий провод разбиваются на конечные элементы длиной 2,5 и 0,25 м соответственно. Токоприемник моделируется механической системой двух подпружиненных масс по аналогии с [13]. Масса полоза – 16 кг, приведенная масса нижних рам и пружин токоприемника – 45 кг, жесткость верхней пружины равна 6 кН/м, нижней пружины – 1 кН/м.

Требуется, принимая во внимание жесткость провода при растяжении и при изгибе, исследовать изменение силы контактного взаимодействия токоведущего провода и полоза токоприемника  $F$  в зависимости от скорости движения электровоза  $V$ .

Некоторые результаты вычислений по изложенному в разделе 2 алгоритму приведены на

рис. 2–7. В начальный момент времени токоприемник располагается в середине первого пролета, начальная сила нажатия токоприемника  $F_0 = 100$  Н.

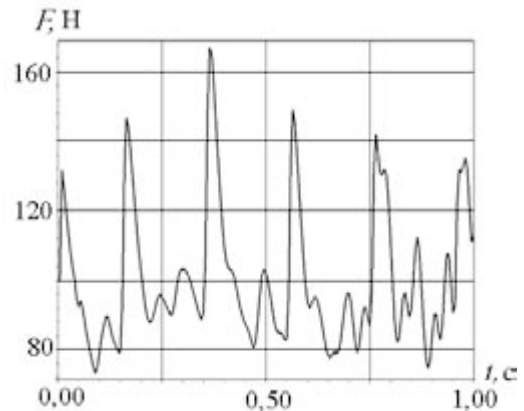


Рис. 2. Изменение силы контактного взаимодействия  $F$  в зависимости от времени  $t$ .  $V = 180$  км/час

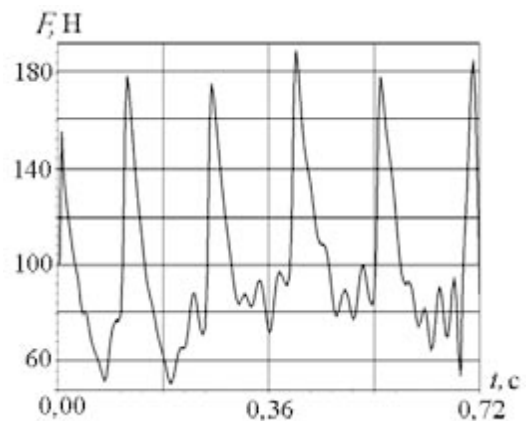


Рис. 3. Зависимость  $F(t)$ .  $V = 250$  км/час

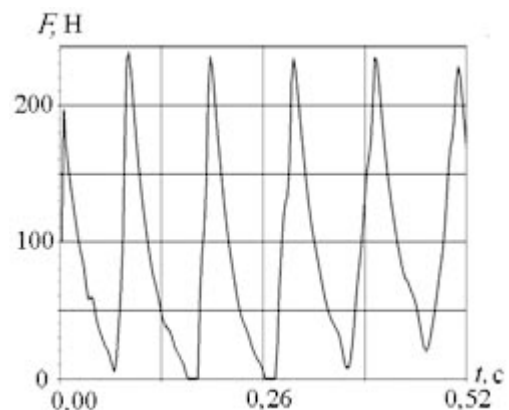


Рис. 4. Зависимость  $F(t)$ .  $V = 340$  км/час

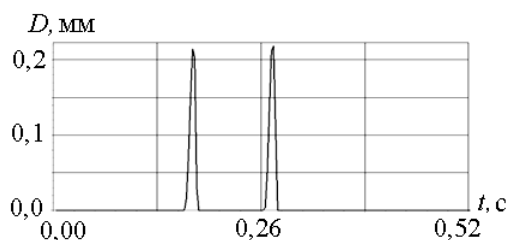


Рис. 5. Изменение величины зазора  $D$  между токоведущим проводом и ползком токоприемника в зависимости от времени  $t$ .  $V = 340$  км/час

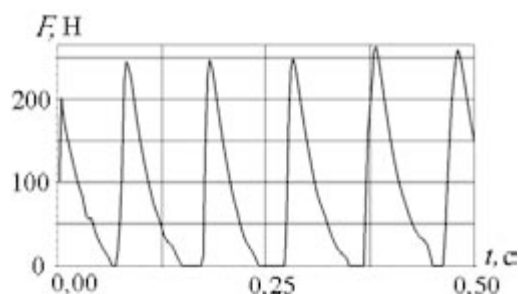


Рис. 6. Зависимость  $F(t)$ .  $V = 360$  км/час

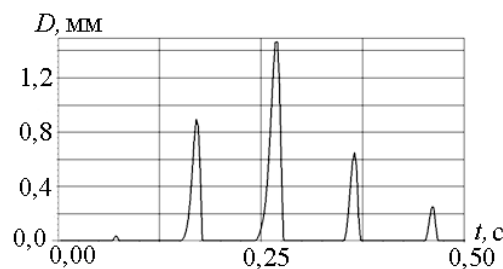


Рис. 7. Зависимость  $D(t)$ .  $V = 360$  км/час

Анализ результатов численного моделирования показывает следующее.

При прохождении ползком токоприемника узлов присоединения струн имеет место быстро протекающий процесс изменения силы контактного взаимодействия токоприемника с токоведущим проводом.

С увеличением скорости движения электроваза возрастает интервал изменения силы контактного взаимодействия.

При достаточно высоких скоростях возможно появление зазора и, как следствие, снижение качества токосъема (рис. 5–7).

Эти закономерности хорошо известны специалистам по результатам наблюдений, натурных испытаний и численных экспериментов в данной области исследований, что позволяет сделать вывод об адекватности результатов моделирования.

**Заключение.** Представленная в данной статье методика численного моделирования позволяет прогнозировать состояние системы «контактная сеть – токоприемник» при различных значениях скорости движения электроваза, начальной силы контактного взаимодействия, расстояний между опорами и струнами, жесткости струн, массы и жесткости токоприемника, силы натяжения токоведущего провода и других характеристик системы. Тем самым в дополнение к возможностям известных методик [15], [7], [22], [8] [6] расширяется набор инструментов для исследования систем «контактная сеть – токоприемник», что может быть использовано при совершенствовании и оптимизации этих систем.

Результаты моделирования по представленной методике могут быть использованы при выполнении расчетов контактных подвесок в целях улучшения технико-экономических характеристик электрифицированного железнодорожного транспорта.

Заметим, что механические системы с полуконтактным (односторонним) взаимодействием элементов являются физически адекватными моделями разнообразных объектов, часто встречающихся в природе и технике. При математическом описании таких физических моделей применяются соотношения, аналогичные (1)–(3). При этом исходная задача сводится к линейной задаче дополненности. Существуют примеры применения этих соотношений при решении других задач [4], [18].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-08-00979).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аргатов И. И., Дмитриев Н. Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
3. Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.
4. Васильев А. С., Никонова Ю. В., Раковская М. И. Математическое моделирование технологического процесса очистки древесины в корообдирочном барабане // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. «Естественные и технические науки». 2008. № 1. С. 117–119.
5. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Механика дискретного контакта // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 418–437.
6. Егоров В. В. Динамический расчет вантово-стержневых систем с отключающимися элементами на основе конечно-элементной модели // [www.tvp.ru/conferen/vsppm05s/kipso156.pdf](http://www.tvp.ru/conferen/vsppm05s/kipso156.pdf).

7. Ерошенко С. В., Демченко А. Т., Туркин В. В. Метод прямого математического моделирования динамики контактных подвесок // Наука и транспорт. Спец. вып. журнала «Транспорт Российской Федерации». СПб.: Российская академия транспорта, 2007. С. 32–33.
8. Ефимов А. В., Галкин А. Г. Развитие теории проектирования контактной сети на основе учета продолжительности ее жизненного цикла // Транспорт Урала: Науч.-техн. журнал. Екатеринбург: УрГУПС, 2004. № 1. С. 53–59.
9. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
10. Кувшинов Д. А. Численное моделирование контактной сети и токоприемника электровоза как механической системы с полукоэрцитивным взаимодействием элементов // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Научная книга, 2008. № 2.3 (32). С. 360–364.
11. Колесников Г. Н., Кувшинов Д. А. Численное моделирование колебаний контактной подвески с учетом геометрической нелинейности // Информационные технологии моделирования и управления. Воронеж: Научная книга, 2008. № 1 (44). С. 98–103.
12. Колесников Г. Н., Раковская М. И. Энергетический критерий очередности перехода односторонних связей в действительное состояние // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2006. Т. 13. Вып. 4. С. 652–653.
13. Комарова О. А. Особенности взаимодействия токоприемника с контактной подвеской при высоких скоростях движения электропоездов: Дис. ... канд. техн. наук: 05.22.07. СПб., 2004. 147 с. <http://diss.rsl.ru>.
14. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 208 с.
15. Обеспечение качества токосъема // Железные дороги мира. 2000. № 4. <http://www.css-rzd.ru/zdm/>.
16. Пфайффер Ф., Глоккер К. Контакты в системах твердых тел // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 61. Вып. 5. С. 805–816.
17. Раковская М. И. Об одном подходе к численному моделированию движения системы упругих тел с полукоэрцитивными контактами // Международная конф. «Шестые Окуневские чтения». 23–27 июня 2008 г., Санкт-Петербург: Материалы докладов. Т. 2. / Балт. гос. техн. ун-т (БГТУ). СПб., 2008. С. 45–49.
18. Раковская М. И., Никонова Ю. В. Численное моделирование и определение сил контактного взаимодействия длинномерных сортиментов в корообдирочном барабане // Системы управления и информационные технологии. Воронеж: Научная книга, 2008. № 1.3 (31). С. 397–401.
19. Рудых О. Л., Соколов Г. П., Пахомов В. Л. Введение в нелинейную строительную механику. М.: АСВ, 1999. 103 с.
20. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Стержневые системы. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.
21. Туркин В. В. Исследование взаимодействия пространственных автокомпенсированных контактных подвесок с токоприемниками: Дис. ... канд. техн. наук: 05.22.07. М.: РГБ, 2005. 160 с. <http://diss.rsl.ru>.
22. Шумейко Г. С. Методики расчета предварительно напряженных систем двойных контактных подвесок на действие статических и ветровых нагрузок: Дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17, 05.22.07. М., 2003. 248 с. <http://diss.rsl.ru>.
23. Ferris M. C., Pang J. S. Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems // SIAM Review. Dec. 1997. Vol. 39(4). P. 669–713.
24. Klarbring A., Pang J. Existence of solutions to discrete semicoercive frictional contact problems // Society For Industrial And Applied Mathematics. Journal On Optimization. 1998. Vol. 8 (2). P. 414–442.