УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Март, № 5 **Технические науки** **2009**

УДК 536.244

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ БАБКИН
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики строительного факультета ПетрГУ
babkin@karelia.ru

ПРОФИЛИ СКОРОСТЕЙ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГЛАДКОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ НЕМАЛОГО ДИАМЕТРА

Модель вихревой анизотропной турбулентности используется для определения полей скоростей и температур при установившемся турбулентном течении несжимаемой жидкости в прямой круглой трубе. Область течения разбивается на пристеночный слой и ядро течения. В пристеночном слое турбулентное течение рассматривается как течение ориентируемой жидкости, локальная анизотропия которой задается так называемым директором (вектором-ориентиром вихревого типа). Турбулентные вязкость и теплопроводность в ядре течения считаются постоянными. Задача о теплообмене при постоянной температуре стенки решается методом Галеркина.

Ключевые слова: вихревые структуры, анизотропная турбулентность, директор, турбулентная вязкость, турбулентная теплопроводность

ВВЕДЕНИЕ

Существует тесная связь между турбулентностью вязкой жидкости и находящимися в ней вихрями. Переход жидкости из ламинарного режима течения в турбулентный у твердой стенки сопровождается образованием когерентных вихревых структур, называемых Λ-вихрями, или подковообразными вихрями [4], [16], которые в развитом турбулентном течении вблизи твердой стенки образуют устойчивую, плотно упакованную систему [16].

Наблюдаемая в экспериментах связь между турбулентностью и вихревыми структурами стимулировала создание моделей турбулентности, которые тем или иным способом учитывают эту связь. Эти модели называют моделями вихревой турбулентности [1], [8], [17]. Одной из таких моделей является рассматриваемая здесь наша модель [1], [2], предназначенная для описания турбулентных течений в слое, непосредственно прилегающем к твердой поверхности (стенке). В ней пристеночные структуры рассматриваются как носители локальной вихревой анизотропии, определяющей как турбулентную вязкость, так и турбулентную теплопроводность среды. В связи с этим данная модель называется моделью анизотропной вихревой турбулентности.

В настоящей работе модель пристеночной анизотропной турбулентности [1], [2] используется для решения двух задач – об определении поля скоростей и поля температур при установившемся турбулентном течении несжимаемой жидкости в круглой трубе. Пристеночный слой вихревой турбулентности имеет довольно небольшую толщину, порядка нескольких сантиметров [13], [16], поэтому во всем потоке модель можно применять только в тех случаях, когда толщина пристеночного слоя достигает оси трубы или близка к ней. В трубах больших диаметров поток необходимо делить на две части – пристеночный слой и ядро течения, подобно тому, как это делается в [5], [10]. Если пренебречь влиянием теплообмена на течение жидкости, то задачи об определении полей скорости и температуры можно решать раздельно [9], [10], что и будет сделано ниже.

Уравнения модели анизотропной турбулентности. В модели [1], [2] пристеночное турбулентное течение вязкой жидкости рассматривается как движение анизотропной среды, анизотропию которой создает система Λ-вихрей. Λ-вихрь имеет вершину как наиболее удаленную от стенки точку вихря и две ветви, убегающие вниз по потоку. При удалении от вершины ветви приближаются к стенке, в пределе располагаясь вдоль нее. По наблюдениям [13], [16], угол наклона вихря к направлению течения у вершины в среднем равен 40–45°. Согласно [16], вихри создают статистически равное, противоположное вращение, так что среднее значение продольной завихренности равно нулю. В этой ситуации одной из характеристик структуры в точке, влияющих на течение жидкости, является среднее направление вихревых линий, характеризуемое вектором **n**, который, вообще говоря, может быть как единичным, так и произвольной длины, в зависимости от того, учитывается или не учитывается плотность вихревых линий. Вектор **n** называется директором.

Все локальные величины, характеризующие состояние и движение среды, в модели [1], [2] по определению считаются осредненными по объему. Кинематическими параметрами среды в точке являются скорость **u** и директор **n** единичной длины. При таком определении турбулизованная жидкость может рассматриваться как ориентируемая жидкость, модель которой, нацеленная первоначально на описание динамики жидких кристаллов, построена в [11], [15]. Уравнение неразрывности и уравнения движения несжимаемой ориентируемой жидкости в декартовых координатах x_i имеют вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0\,, \tag{1}$$

$$\rho\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \rho f_i\,, \tag{2}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathrm{J}\,\frac{\mathrm{dn_i}}{\mathrm{dt}}\right) = \frac{\partial\beta_{\mathrm{ij}}}{\partial\mathrm{x_j}} + \mathrm{g_i} + \rho\mathrm{G_i}\,, \tag{3}$$

где ρ – плотность жидкости, u_i – скорость, p_{ij} – напряжения, f_i – плотность массовой силы. Уравнение (3) является характерным уравнением движения ориентируемой жидкости [11], [15]. Величины β_{ij}, g_i, G_i называются соответственно обобщенными напряжениями, обобщенной внутренней и обобщенной внешней массовой силой. Параметр J характеризует осредненную инерционность структуры при повороте элементов вихревых нитей. Здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Определяющие уравнения учитывают специфику среды. Для турбулизованной жидкости вблизи стенки они имеют вид [1], [2]

$$\mathrm{p_{ij}} = -\mathrm{p}\,\delta_{\mathrm{ij}} + \sigma_{\mathrm{ij}} + \tau_{\mathrm{ij}}\,, \tag{4}$$

$$\sigma_{\mathrm{ij}} = \mathrm{Kn}_{\alpha,\mathrm{i}}(\mathrm{n}_{\mathrm{j},\alpha} - \mathrm{n}_{\alpha,\mathrm{j}} + \mathrm{n_j n}_\beta \mathrm{n}_{\alpha,\beta})\,, \tag{5}$$

$$\tau_{\mathrm{ij}} = \mu_1 \mathrm{n}_\alpha \mathrm{n}_\beta \mathrm{e}_{\alpha\beta}\mathrm{n_i n_j} + \mu_0 \mathrm{e_{ij}}\,, \tag{6}$$

$$\beta_{\mathrm{ij}} = \kappa_{\mathrm{j}}\mathrm{n_i} + \mathrm{K}(\mathrm{n_{i,j}} - \mathrm{n_{j,i}} - \mathrm{n_j n}_\alpha \mathrm{n}_{\mathrm{i},\alpha})\,, \tag{7}$$

$$\mathrm{g_i} = \chi\mathrm{n_i} - (\kappa_\beta \mathrm{n_i})_{,\beta} + \mathrm{Kn}_\alpha \mathrm{n}_{\beta,\alpha}\mathrm{n}_{\beta,\mathrm{i}}\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{n_{i,j}} = \frac{\partial \mathrm{n_i}}{\partial \mathrm{x_j}}, \quad \mathrm{e_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x_j}} + \frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x_i}}\right), \tag{9}$$

где p – давление; μ_0, μ_1, K – коэффициенты модели; δ_{ij} – символ Кронекера; χ и κ_i – произвольные скалярная и векторная функции соответственно. Поскольку свойства жидкости вблизи твердой стенки определяются пристеночной вихревой структурой потока, коэффициенты μ_0, μ_1, K могут зависеть от параметров, глобально характеризующих течение, например от числа Рейнольдса.

Для исследования изотермических течений уравнений (1)–(8) достаточно. Однако при решении задачи о теплообмене их необходимо дополнить уравнением притока тепла [15]:

$$\rho\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{p_{ij}e_{ij}} + \beta_{\mathrm{ij}}\mathrm{N_{ij}} - \mathrm{g_i N_i} + \mathrm{Q} - \frac{\partial \mathrm{q_i}}{\partial \mathrm{x_i}}\,, \tag{10}$$

где U – внутренняя энергия, отнесенная к единице массы, Q – интенсивность источника тепла, q_i – плотность потока тепла. Кинематические параметры N_i, N_{ij} определяются формулами:

$$N_i = \dot{n}_i - \omega_{i\alpha}n_\alpha, \quad N_{i,j} = \dot{n}_{i,j} - \omega_{i\alpha}n_{\alpha,j}$$
$$2\omega_{ij} = u_{i,j} - u_{j,i}, \quad \dot{n}_i = \frac{dn_i}{dt}. \tag{11}$$

Профиль скоростей. Пусть в бесконечной прямой круглой трубе радиуса R в режиме установившегося турбулентного течения движется вязкая несжимаемая жидкость. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, x с осью x по оси трубы в направлении течения. Область течения зададим как объединение ядра течения $0 \le r < r_0$ и пристеночной области $r_0 \le r \le R$. Найдем вначале профиль скоростей в пристеночной области. Предположим, что коэффициенты μ_0, μ_1, K и инерционный параметр J при заданных условиях течения постоянны. Пренебрегая внешними массовыми силами f_i и G_i, скорость u_i и директор n_i будем искать в виде

$$u_x = u(r),\ u_r = u_\varphi = 0,\ n_x = \cos\ \theta(r),$$
$$n_r = \sin\ \theta(r), \quad n_\varphi = 0, \tag{12}$$

где θ – угол между директором n_i и осью x.

Подстановка выражений (12) в уравнения (1)–(8) с учетом сделанных предположений приводит к необходимым для решения задачи уравнениям. Уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно. Пользуясь произволом χ и κ_i в формулах (7) и (8), положим их равными нулю. В результате из уравнений (3) получим одно уравнение для θ (*r*) в виде [1], [2]

$$\sin\theta \ \ \cos\theta\left(\theta'' + \frac{\theta'}{r}\right) - (2 - 3\cos^2\theta) \ \ \theta'^2 = 0\,. \quad (13)$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по координате *r*.

Уравнения (2), (4)–(6), совместно с (12) после небольших преобразований дают уравнение для профиля скоростей *u*(*r*) [1], [2]

$$\left(\mu_1 \sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{\mu_0}{2}\right) \ u' = -\frac{r}{R}\tau_w\,, \quad (14)$$

где τ_w – модуль касательного напряжения на стенке трубы.

Для трубы с гладкими стенками граничные условия прилегания вихревых линий к стенке и прилипания жидкости к ней имеют вид

$$\theta_{|r=R} = 0,\ \ u_{|r=R} = 0. \quad (15)$$

Первое интегрирование уравнения (13) дает

$$\mathrm{r}\sin\theta\cos^2\theta\theta' = -\mathrm{bR}\,, \quad (16)$$

где (–*b*) – постоянная интегрирования, которую на данном этапе исследований приходится определять экспериментально; перед *b* взят знак минус, чтобы $b > 0$. При сравнении решений ряда задач с опытными данными для воздуха выяснилось, что $b = 4{,}83$ м$^{-1}$ [3].

Интегрируя уравнение (16) с первым граничным условием (15), имеем

$$\cos^3\theta = 1 + 3bR\ln\xi, \qquad \xi = \frac{r}{R}. \quad (17)$$

Вблизи стенки трубы функцию lnξ заменим первым членом ее разложения в ряд Тейлора – функцией (ξ – 1), тогда получим

$$\cos\theta = \left[1 - 3\mathrm{bR}(1-\xi)\right]^{1/3}. \quad (18)$$

Подстановка формулы (18) в уравнение (14) и интегрирование его затем со вторым граничным условием (15) дают искомый профиль скоростей в пристеночном слое:

$$\begin{aligned} &u = Au_*\left[\Phi(\xi) - \Phi(1)\right],\\ &\Phi(\xi) = F(t(\xi)),\\ &t(\xi) = [1 - 3bR(1-\xi)]^{1/3}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$F(t) = \frac{3bR-1}{2\gamma^2-1}\left(\sqrt{\gamma^2-1}\ \ \mathrm{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{\gamma^2-1}} + \frac{\gamma}{2}\ln\frac{\gamma-t}{\gamma+t}\right) +$$
$$+\frac{1+2\varepsilon}{4(2\gamma^2-1)}\ln\ \frac{\gamma^2-t^2}{t^2+\gamma^2-1} + \frac{1}{4}\ln\ \left|t^4-t^2-\varepsilon\right| + \frac{t^2}{2}\,,$$
$$\mathrm{A} = \frac{\rho \mathrm{u}_*}{3\mu_1 \mathrm{b}^2\mathrm{R}},\ \ \mathrm{u}_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},\ \ \varepsilon = \frac{\mu_0}{2\mu_1},\ \ 2\gamma^2 = 1 + \sqrt{1+4\varepsilon},$$

где u_* – динамическая скорость.

При определении профиля скоростей в ядре течения, как и в [5], [10], воспользуемся предположением о постоянстве турбулентной вязкости в ядре при фиксированных числе Рейнольдса и радиусе трубы. Условием сращивания профилей является равенство турбулентных вязкостей на границе областей $r = r_0$. Как видно из уравнения (14), динамическая турбулентная вязкость в пристеночном слое задается формулой

$$\mu_T = \mu_1\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}\mu_0\,. \quad (20)$$

На рис. 1 даны графики зависимости безразмерной кинематической турбулентной вязкости $N = \mu_T/(\rho u_* R)$ от безразмерного расстояния от стенки η = (1 − ξ) при течении воздуха (плотность ρ = 1,205 кг/м^3, кинематическая вязкость ν = 1,50·10^{-5} м^2/с) в трубе диаметром *d* = 247 мм и числом Рейнольдса Re = 40260 (Re = *wd*/ν, где *w* – средняя скорость). Кривая *1* – расчет по формулам (20) и (17) при *b* = 4,83 м$^{-1}$, μ_0 = 1,85 ·10^{-6} Па · с, $\mu_1 = 0{,}047\cdot u_*$ Па·с, [3]; кривая *2* – аппроксимация [19] опытных данных Лауфера [14]; кривая *3* – график эмпирической формулы Рейхардта [18]

$$\mathrm{N} = 0.0666\left[1-(1-\eta)^2\right]\left[1+2(1-\eta)^2\right]. \quad (21)$$

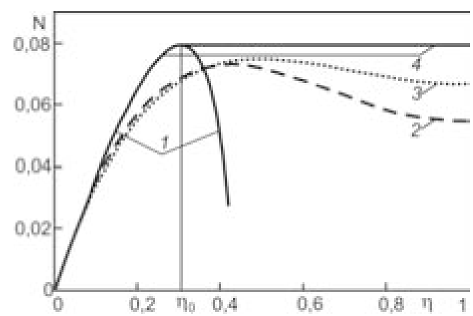

Рис. 1

В пристеночной области графики аналогичны: все кривые монотонно растут, достигая в близких точках близких максимальных значений. За точкой экстремума кривая *1* резко падает, тогда как кривые *2* и *3* показывают слабое падение за точками экстремума при приближении к оси потока. Существование точки экстремума на графиках *N*(η), особенно явное на кривой *1*, дает основания определить границу между пристеночным слоем и ядром течения как поверхность $r = r_0$ (на рис. 1 точка $\eta_0 = (R - r_0)/R$), на которой турбулентная вязкость (20) достигает максимального значения. Очевидно, в этой точке угол θ = 45°, что вполне согласуется с максимальными наблюдаемыми значениями углов наклона пристеночных вихрей [13], [16].

По условию сращивания скоростей на границе областей постоянную турбулентную вязкость в ядре μ_{T0} определим как $\mu_{T0} = \mu_T(\eta_0)$, где μ_T – функция, определяемая формулами (20) и (17). На рис. 1 принятой по всему сечению трубы вязкости соответствует кривая *4*. Максимальное значение μ_{T0} и точка максимума η_0 имеют значения:

$$\mu_{T0} = \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_0}{2}, \qquad \eta_0 = 1 - \exp\left(\frac{\sqrt{2}-4}{12bR}\right). \quad (22)$$

Если угол θ определен приближенной формулой (18), то

$$\eta_0 = \frac{4-\sqrt{2}}{12bR}. \quad (23)$$

Графики зависимости $N(\eta)$, очень близкие и качественно, и количественно к кривой *4*, другими подходами получены в [5], [17].

При постоянной турбулентной вязкости профиль скоростей в ядре течения $0 \le \xi \le \xi_0$ имеет вид

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_0}{u_*} + \frac{1}{2N_0}\left(\xi_0^2 - \xi^2\right), \ \mathrm{N}_0 = \frac{\mu_{T0}}{\rho u_* R}, \quad (24)$$
$$u_0 = Au_*\left[\Phi(\xi_0) - \Phi(1)\right].$$

На рис. 2 для примера представлены профили скоростей при течении воздуха в трубе диаметра d = 247 мм при числе Рейнольдса Re = 40260. Точками обозначены результаты экспериментов Лауфера [14]. Расчетный профиль скоростей (19), (24) (кривая *1*) найден в условиях эксперимента и при тех же расчетных значениях для b, μ_0 и μ_1, которые использованы в расчетах для рис. 1. Кривая *2* – график эмпирической формулы [9]

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa y_+) + \frac{0,29\kappa y_+^2}{1+0,0935(\kappa y_+)^2} + \quad (25)$$
$$+ \frac{\eta y_+}{1+\kappa(y_+/\eta)}\left[1 + 6\Pi - (1+4\Pi)\eta\right],$$
$$y_+ = \frac{(R-r)u_*}{\nu}$$

при κ = 0,41 и П = 0,2. Кривая *3* – график эмпирической формулы [10]

$$\frac{u}{u_*} = \begin{cases} (u_{\max}/u_*) + 2,44\ln(\eta) - 0,8 \text{ при } 0 < \eta \le 0,15 \\ (u_{\max}/u_*) - 7,8(1-\eta)^2 \text{ при } \eta > 0,15 \end{cases} \quad (26)$$

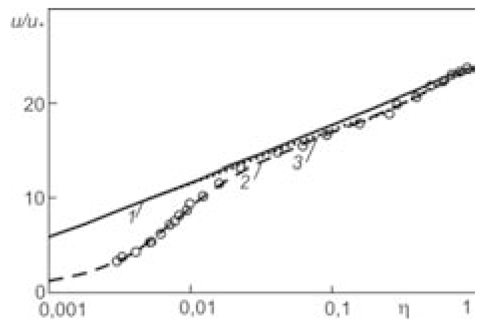

Рис. 2

Очевидно, за исключением очень узкой области, прилегающей к стенке трубы, расчетный профиль близок как к опытным точкам, так и к графикам формул (25), (26).

Из формулы (22) следует, что при уменьшении радиуса трубы R относительная толщина пристеночного слоя растет, достигая в пределе единицы при стремлении радиуса к нулю. В этом случае область, занимаемая ядром, сужается, так что, не делая большой ошибки, все течение в трубе можно считать анизотропно турбулентным, определяя профиль скоростей во всей области течения формулами (19). Трубы, в которых профиль скоростей (19) имеет место во всей области течения, естественно назвать трубами малого диаметра. Для максимального радиуса труб малого диаметра R_{max} формула (22) дает значение $R_{max} = 0$. Однако, если воспользоваться приближенной формулой (23), получим $R_{max} = (4 - \sqrt{2})/(12b)$. Для течений воздуха $R_{max} \approx 45$ мм, причем при этом значения радиуса из формулы (22) следует η_0 = 0,63. Использование модели во всей области течения в трубе малого диаметра хорошо согласуется с результатами экспериментов. На рис. 3 приведены расчетные профили скоростей *1* и *4*, полученные соответственно по формуле (19) по всему сечению и формулам (19), (24) двухслойной модели для течения воздуха в трубе диаметром d = 120 мм при числе Рейнольдса Re = 40000; на рисунке графики совпадают. Кривые *2* и *3* соответственно являются графиками эмпирических формул (25) и (26), полученных при тех же значениях параметров.

Этот факт, по-видимому, можно объяснить тем, что модель не учитывает наличие в структуре вихрей разной длины, так называемой «иерархии вихрей» [16], а ограничивается средним уровнем.

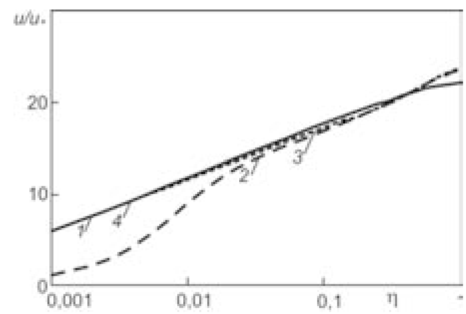

Рис. 3

Предложенная в работе [10] формула (26) также предполагает двухслойность турбулентного течения, что очевидно из самой формулы. Однако природа двухслойности осталась не до конца проясненной, поэтому и толщина пристеночного слоя $\eta \le 0{,}15$ воспринимается просто как результат подгонки при обработке опытных данных.

Теплообмен. Имея выражения (19) и (24) для турбулентного профиля скоростей в трубе, можно приступать к решению задачи о теплообмене. Найдем установившееся распределение температуры в полубесконечной трубе $x \ge 0$ с постоянной температурой стенки T_w. В принятой системе координат r, φ, x температуру T отыскиваем в виде $T = T(r, x)$. Как и при определении профиля скоростей, задача о распределении температуры в пристеночном слое и ядре течения рассматривается отдельно.

В пристеночном слое движущаяся среда (турбулентная жидкость) имеет локальную симметрию, задаваемую директором n_i, поэтому с учетом зависимости $T(r, x)$ закон Фурье записывается в виде

$$q_r = -(\lambda_0 + \lambda_1 n_r^2)\frac{\partial T}{\partial r} - \lambda_1 n_r n_x \frac{\partial T}{\partial x},$$
$$q_\varphi = -\lambda_1 n_\varphi\left(n_r \frac{\partial T}{\partial r} + n_x \frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (27)$$
$$q_x = -\lambda_1 n_x n_r \frac{\partial T}{\partial r} - (\lambda_0 + \lambda_1 n_x^2)\frac{\partial T}{\partial x},$$

где (q_r, q_φ, q_x) – поток тепла, λ_0 и λ_1 – коэффициенты модели, характеризующие турбулентную теплопроводность среды. При фиксированном режиме течения коэффициенты λ_0 и λ_1 считаем постоянными.

Если пренебречь теплопроводностью в направлении течения, то коэффициент турбулентной теплопроводности λ_T в пристеночном слое определяется формулой

$$\lambda_T = \lambda_0 + \lambda_1 n_r^2 = \lambda_0 + \lambda_1 \sin^2\theta\,. \qquad (28)$$

Пусть внутренние источники тепла отсутствуют: $Q = 0$. Тогда, сделав обычные в подобных задачах предположения [6], из уравнения (10) с учетом формул (27) получим уравнение распространения тепла

$$\left(\lambda_0 + \lambda_1\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} +$$
$$+\left(\frac{\lambda_0 + \lambda_1\sin^2\theta}{r} + \lambda_1\sin 2\theta\theta'\right)\frac{\partial T}{\partial r} = \qquad (29)$$
$$= \rho\ \ c_p u(r)\frac{\partial T}{\partial x},$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

В ядре течения коэффициент турбулентной теплопроводности λ_{T0}, как и турбулентную вязкость, будем считать постоянным и равным турбулентной теплопроводности λ_T на границе областей $\xi = \xi_0$:

$$\lambda_{T0} = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2}\,. \qquad (30)$$

Тогда уравнение распространения тепла в ядре течения имеет вид

$$\lambda_{T0}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \rho c_p u(r)\frac{\partial T}{\partial x}\,. \qquad (31)$$

Пусть T_0 = const – температура во входном сечении $x = 0$. Введем безразмерные переменные

$$\Theta = \frac{\mathrm{T} - \mathrm{T_w}}{\mathrm{T_0} - \mathrm{T_w}}\,, \qquad \xi = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}\,, \qquad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{R}}\,. \qquad (32)$$

Уравнения (29) и (31) можно рассматривать как одно уравнение во всей области течения, которое после подстановки в него соответственно профилей скоростей (19) и (24) в безразмерных переменных (32) имеет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} + \Psi_1(\xi)\frac{\partial\ \Theta}{\partial\xi} = \Psi_2(\xi)\frac{\partial\ \Theta}{\partial\ \mathrm{X}},$$
$$\Psi_2(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\rho c_p u(\xi) R}{\lambda_{T0}}, & 0 < \xi < \xi_0, \\ \dfrac{\rho c_p u_* A R\ \ (\Phi(\xi) - \Phi(1))}{\lambda_0 + \lambda_1(1 - t^2(\xi))}, & \xi_0 < \xi < 1. \end{cases} \qquad (33)$$

Уравнение (33) должно удовлетворять граничным условиям

$$\Theta(\xi, 0) = 1\ ,\ \ \Theta(1, X) = 0,\ \ \frac{\partial\Theta(0, X)}{\partial\xi} = 0 \qquad (34)$$

и условиям сращивания решений на границе областей $\xi = \xi_0$

$$\Theta(\xi_0 - 0, X) = \Theta(\xi_0 + 0, X),$$
$$\frac{\partial\Theta(\xi_0 - 0, X)}{\partial\xi} = \frac{\partial\Theta(\xi_0 + 0, X)}{\partial\xi}\,. \qquad (35)$$

Равенства (35) выражают равенство температур и потоков тепла при переходе через границу $\xi = \xi_0$.

Функции $\Psi_1(\xi)$ и $\Psi_2(\xi)$ в уравнении (33) на границе $\xi=\xi_0$, очевидно, разрывные. Однако вследствие первого условия (35) на границе слоев решение Θ (ξ, X) должно быть непрерывно.

Как и в [3], решение уравнения (33) будем искать приближенно, методом Галеркина, в виде

$$\Theta(\xi, X) = \sum_{k=1}^{n} g_k(X)\varphi_k(\xi)\,, \qquad (36)$$

взяв здесь в качестве базисных непрерывные функции $\varphi_k(\xi)$, удовлетворяющие второму и третьему граничным условиям (34) и первому условию непрерывности (35):

$$\varphi_k(\xi) = \Phi_0(\xi)\cos\,((k-1)\ \pi\xi),$$
$$k = 1,\ 2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ n\ ,$$
$$\Phi_0(\xi) = \begin{cases} F_0(\xi) - F_0(1)\ , & \xi_0 \le \xi \le 1 \\ \dfrac{\Phi_0(\xi_0)}{u(\xi_0)}\left[u(\xi_0) + \dfrac{1}{2N_0}(\xi_0^2 - \xi^2)\right], & 0 \le \xi < \xi_0 \end{cases} \qquad (37)$$
$$F_0(\xi) = 2(3bR-1)\ln\frac{\gamma - t(\xi)}{\gamma + t(\xi)} +$$
$$+\ln\frac{\gamma^2 - t^2(\xi)}{t^2(\xi) + \gamma^2 - 1} + \ln\left|t^4(\xi) - t^2(\xi) - \varepsilon\right| + 2t^2(\xi).$$

где $t(\xi)$ – функция, определенная третьей формулой (19). Функции $g_k(X)$, удовлетворяющие первому граничному условию (34), определяются стандартной процедурой метода Галеркина [7].

Формула (36) дает приближенное решение задачи. Местное число Нуссельта $\mathrm{Nu} = \alpha d/\lambda$ можно вычислить затем по формуле [9], [10]

$$\mathrm{Nu} = -\frac{2\lambda_0}{\lambda\bar{\Theta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)_{|\xi=1},$$
$$\bar{\Theta}(\mathrm{X}) = \frac{2}{\mathrm{w}}\int_0^1 \Theta(\xi, \mathrm{X})\mathrm{u}(\xi)\xi\mathrm{d}\,\xi\,, \qquad (38)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности газа, $\bar{\Theta}$ – средняя массовая температура по сечению и w – средняя скорость в трубе.

Для сравнения с опытными данными решение (36) было реализовано при конкретных условиях. Жидкость – воздух: $\rho = 1{,}205$ кг/м^3, $\nu = 1{,}5\cdot10^{-5}$ м^2/с, $\lambda = 2{,}57\cdot10^{-2}$ Вт/(м · К), $c_p = 1002$ Дж/(кг · К), число Прандтля Pr = 0,705. Коэффициенты модели те же, что были найдены из сравнения с опытными данными для труб малого диаметра [3]: $\lambda_0 = 0{,}28R\ \ u_*$ Вт/(м · К), $\lambda_1 = 46{,}5\,u_*$ Вт/(м · К). Расчеты проведены при $n = 25$.

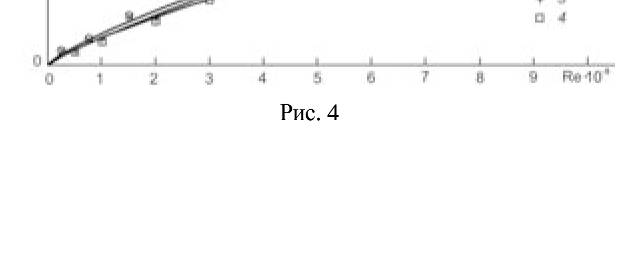

Рис. 4

В результате расчета получены значения предельного числа Нуссельта $\mathrm{Nu}_\infty = \mathrm{Nu}\big|_{X=200}$ при числах Рейнольдса вплоть до $\mathrm{Re} = 10^6$ в трубах диаметров d = 100; 200; 300; 400 мм (точки на рис. 4). Для сравнения на рисунке приведены также графики эмпирических формул: кривая *1* [9]

$$\mathrm{Nu}_\infty = \frac{f\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}/8}{1 + \dfrac{900}{\mathrm{Re}} + 12{,}7\sqrt{\dfrac{f}{8}}\left(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1\right)}; \qquad (39)$$

кривая *2* [10]

$$\mathrm{Nu}_\infty = 7{,}6 - \frac{3{,}6}{\lg\ \mathrm{Re}} + 0{,}0096\mathrm{Re}^{0{,}87}\mathrm{Pr}^{0{,}605}; \qquad (40)$$

кривая *3* [12]

$$\mathrm{Nu}_\infty = \frac{\mathrm{Re}\ \ \mathrm{Pr}\sqrt{f/2}}{4{,}24\ln(\mathrm{Re}\sqrt{f/16}) + 25{,}0\mathrm{Pr}^{2/3} + 4{,}24\ln\mathrm{Pr} - 20.2}, \qquad (41)$$

где $f = \left(1{,}82\lg(\mathrm{Re}/8)\right)^{-2}$.

Графики на рис. 4 позволяют отметить следующее. Во-первых, эмпирические формулы (39)–(41) не вполне эквивалентны друг другу. Если формулы (40) и (41) дают близкие значения практически во всем диапазоне чисел Рейнольдса, то формула (39) близка к ним примерно до $\mathrm{Re} = 3\cdot10^5$. Во-вторых, расчетные значения зависимости $\mathrm{Nu}_\infty(\mathrm{Re})$ зависят от диаметра трубы. Однако разность значений Nu_∞ для труб диаметра 100–400 мм при одном и том же числе Рейнольдса невелика (не более 6–7 % от среднего значения), так что в экспериментах такая разность может рассматриваться как ошибка эксперимента, а сами значения зависимости $\mathrm{Nu}_\infty(\mathrm{Re})$ как независящие от диаметра.

ВЫВОДЫ

Модель анизотропной турбулентности является базой для рассматриваемой двухслойной модели турбулентного течения и теплообмена в трубе. С использованием ее характерного параметра – директора – вводятся определяющие уравнения пристеночной турбулентности и теплопроводности, коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности в ядре течения, а также граница между пристеночной областью и ядром течения. При решении задач и последующем сравнении результатов решений с опытными данными были использованы устойчивые зависимости для коэффициентов модели, которые были найдены ранее при решении других задач и которые можно рассматривать как характерные для среды.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. Н. Николаевскому за внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабкин В. А. Анизотропная турбулентность при течении несжимаемой жидкости между параллельными плоскими стеками // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 401–405.
2. Бабкин В. А. Турбулентный поток в пристеночной области как течение анизотропной жидкости // Инженерно-физический журнал. 2002. Т. 75. № 5. С. 69–73.
3. Бабкин В. А. Теплообмен в круглой трубе при моделировании турбулентного течения воздуха течением ориентируемой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 1. С. 155–161.
4. Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С. Образование трехмерных структур при переходе к турбулентности в пограничном слое // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 6. С. 42–50.
5. Лапин Ю. В., Нехамкина О. А., Стрелец М. Х. Полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений. Установившееся течение в круглой трубе с гладкими стенками // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 31–36.
6. Лыков А. В. Тепломассообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 479 с.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
8. Николаевский В. Н. Пространственное осреднение и теория турбулентности // Вихри и волны. М.: Мир, 1984. С. 266–335.
9. Петухов Б. С., Поляков А. Ф. Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986. 192 с.
10. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.
11. Ericksen J. L. Conservation laws for liquid crystals // Trans. Soc. Rheol. 1961. Vol. 5. № 1. P. 23–34.
12. Kader B. A., Yaglom A. M. Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. № 12. P. 2329–2351.
13. Labraga L., Lagraa B., Mazouz A., Keirsbulck L. Propagation of shear-layer structures in near-wall region of a turbulent boundary layer // Experiments in Fluids. 2002. Vol. 33. № 5. P. 670–676.
14. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA. 1954. Rep. № 1174.
15. Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1968. Vol. 28. № 4. P. 265–283.
16. Perry A. E., Henbest S. and Chong M. S. A theoretical and experimental study of wall turbulence // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 165. P. 163–199.
17. Poje A. C., Lumley J. L. A model for large-scale structures in turbulent shear flows // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 285. P. 349–369.
18. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwidigkeitsverteilung in glatten Leitungen // Z. Angew. Math. Mech. 1951. Bd. 31. S. 208–219.
19. Travis J. R., Buhr H. O., Sesonske A. A model for velocity and eddy diffusivity distributions in fully turbulent pipe flow // The Canadian Journal of Chemical Engineering. 1971. Vol. 49. № 1. P. 14–18.