УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Сентябрь, № 9 **Архитектура и строительство** **2009**

УДК 624.014.074:539.4

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ
кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета ПетрГУ
metalll@bk.ru

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КРУГОВОЙ СОСТАВНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ АРКИ

В работе предложен алгоритм расчета круговой составной подъемистой арки, позволяющий выполнить деформационный расчет и проверить устойчивость арочной конструкции при работе ее материала за пределом упругости. Применяется эквивалентный модуль деформаций, полученный автором статьи ранее. Этот модуль деформаций учитывает влияние деформаций сдвига и развитие в сечении пластических деформаций. Алгоритм расчета учитывает нелинейные геометрические и физические эффекты, возникающие в арке при работе под нагрузкой.

Ключевые слова: подъемистая составная арка, эквивалентный модуль деформаций, деформационный расчет, функционал потери устойчивости

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние круговой составной двухшарнирной упругопластической подъемистой (или непологой) арки. Арка имеет переменное сечение по длине. Пояса арки соединены между собой структурными связями. Для материала арки устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжением. Учет влияния деформаций сдвига осуществляется способом, предложенным Ф. Энгессером и С. П. Тимошенко [6]. Не учитывается влияние касательных напряжений на развитие пластических деформаций. Геометрическая неизменяемость поперечного сечения составной арки обеспечивается постановкой поперечных диафрагм жесткости.

Исследование базируется на использовании дифференциального уравнения упругого изгиба круговой подъемистой арки постоянного сечения по длине, полученного в [2]. В этом уравнении учтено влияние осевых деформаций, а арка считается бесконечно жесткой на сдвиг

$$v_\theta^{V} + (\upsilon^2 + 1)v_\theta''' + \upsilon^2 v_\theta' - R(\xi - \eta) = 0\,, \qquad (1)$$

где $\xi = qR^3/(EJ_x)$, $\upsilon^2 = 1 + \eta$, $\eta = -N_c R^2/(EJ_x)$.

В (1) приняты следующие обозначения: v_θ – перемещение центра тяжести поперечного сечения арки в касательном направлении; θ – угловая координата; q – нормальное давление произвольной интенсивности; R = *const* – радиус кривизны оси недеформированной арки; EJ_x – изгибная жесткость арки; N_c – продольная сила в точке перегиба оси арки.

Для решения уравнения (1) используется метод конечных разностей и шаговое нагружение конструкции [1]. Ось арки делится на n равных частей с образованием между полярными радиусами смежных сечений угла φ. Для j-й узловой точки на оси арки уравнение (1) на k-м шаге нагружения примет вид уравнения в конечных разностях

$$\Delta^5 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^5+[(\upsilon_j^{(k)})^2+1)]\Delta^3 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^3+$$
$$+(\upsilon_j^{(k)})^2\Delta v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi-R(\xi_j^{(k)}-\eta_j^{(k)})=0, \quad (2)$$

где $\xi_j^{(k)}=q_j^{(k)}R^3/(E_{equ,j}^{(k)}J_{xj})$, $(\upsilon_j^{(k)})^2=1+\eta_j^{(k)}$,

$$\eta_j^{(k)}=-N_c^{(k)}R^2/(E_{equ,j}^{(k)}J_{xj}),$$

здесь $\Delta v_{\theta,j}^{(k)}$, $\Delta^3 v_{\theta,j}^{(k)}$ и $\Delta^5 v_{\theta,j}^{(k)}$ – конечные разности соответственно первого, третьего и пятого порядков на k-м шаге нагружения; $q_j^{(k)}$ – равномерно распределенная нагрузка на j-м участке арки во время k-го шага нагружения; $E_{equ,j}^{(k)}$ – эквивалентный модуль деформаций для j-го поперечного сечения арки, учитывающий влияние сдвиговых деформаций и развитие пластических деформаций, равный для k-го шага нагружения.

$$E_{equ,j}^{(k)}=M_{xj}^{(k-1)}h_j/[(\Delta\varepsilon_j^{(k-1)}-\gamma_{y1j}^{(k-1)}h_j Q_{yj}'^{(k-1)})J_{xj}]. \quad (3)$$

Формула (3) была получена и опубликована нами ранее [4]. В ней: $M_{xj}^{(k-1)}$ – изгибающий момент в j-м сечении арки, возникающий при (k–1)-м шаге нагружения; $\Delta\varepsilon_j^{(k-1)}=\varepsilon_{1j}^{(k-1)}-\varepsilon_{2j}^{(k-1)}$ – разность краевых линейных относительных деформаций в j-м сечении арки при (k–1)-м шаге нагружения; h_j – высота j-го поперечного сечения арки; $\gamma_{y1j}^{(k-1)}$ – угол сдвига соединительной решетки составной арки от единичной поперечной силы для j-го участка арки при (k–1)-м шаге нагружения; $Q_{yj}'^{(k-1)}$ – значение первой производной от поперечной силы, действующей в j-м сечении арки при (k–1)-м шаге нагружения.

При известной функциональной зависимости между напряжениями и деформациями $\sigma=f(\varepsilon)$ для материала поясов арки краевые линейные относительные деформации в j-м сечении элемента при $(k-1)$-м нагружении являются функциями усилий:

$$\varepsilon_{1j}^{(k-1)}=\varepsilon_{1j}^{(k-1)}(M_{xj}^{ins(k-1)},P_j^{ins(k-1)}), \quad (4)$$
$$\varepsilon_{2j}^{(k-1)}=\varepsilon_{2j}^{(k-1)}(M_{xj}^{ins(k-1)},P_j^{ins(k-1)}), \quad (5)$$

где $M_{xj}^{ins(k-1)}$ – главный момент эпюры нормальных напряжений относительно центра тяжести j-го поперечного сечения, возникающий при $(k-1)$-м нагружении арки; $P_j^{ins(k-1)}$ – главный вектор эпюры нормальных напряжений в этом сечении при $(k-1)$-м нагружении арки.

Краевые деформации $\varepsilon_{1j}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{2j}^{(k-1)}$ определяются из решения системы уравнений равновесия:

$$M_{xj}^{ins(k-1)}(\varepsilon_{1j}^{(k-1)},\varepsilon_{2j}^{(k-1)})=M_{xj}^{(k-1)},$$
$$P_j^{ins(k-1)}(\varepsilon_{1j}^{(k-1)},\varepsilon_{2j}^{(k-1)})=N_j^{(k-1)}, \quad (6)$$

где $N_j^{(k-1)}$ – продольная сила, действующая в j-м поперечном сечении арки и возникающая при $(k-1)$-м нагружении.

Усилия в j-м сечении арки, имеющей u поясов, определяются по формулам

$$M_{xj}^{ins(k-1)}=\sum_{i=1}^{u}(M_{\bar{x}ji}^{ins(k-1)}+P_{ji}^{ins(k-1)}h_{ij}),$$
$$P_j^{ins(k-1)}=\sum_{i=1}^{u}P_{ji}^{ins(k-1)}, \quad (7)$$

где $M_{\bar{x}ji}^{ins(k-1)}$ и $P_{ji}^{ins(k-1)}$ – соответственно главный момент и главный вектор эпюры нормальных напряжений, действующих в j-м сечении i-й ветви составной арки при (k–1)-м загружении; h_{ij} – расстояние между центрами тяжести i-й ветви и центром тяжести j-го поперечного сечения арки в целом.

Усилия, действующие в i-й ветви арки, находятся из выражений

$$M_{\bar{x}ji}^{ins(k-1)}=\sum_{k_1=1}^{m}D_{jik_1}^{(k-1)}\sigma_{jik_1}^{(k-1)},$$
$$P_{ji}^{ins(k-1)}=\sum_{k_1=1}^{m}C_{jik_1}^{(k-1)}\sigma_{jik_1}^{(k-1)}, \quad (8)$$

где $\sigma_{jik_1}^{(k-1)}$ – нормальное напряжение в k_1-м волокне i-й ветви, определяемое по известной диаграмме «напряжения – относительные деформации» в зависимости от величины линейной относительной деформации k_1-го волокна i-й ветви $\varepsilon_{jik_1}^{(k-1)}$, которая определяется по формуле

$$\varepsilon_{jik_1}^{(k-1)}=a_{jik_1}\varepsilon_{1j}^{(k-1)}+b_{jik_1}\varepsilon_{2j}^{(k-1)}, \quad (9)$$

здесь a_{jik_1} и b_{jik_1} – коэффициенты линейной интерполяции при разбиении ветви по высоте на *m* равных частей; $D_{jik_1}^{(k-1)}$ и $C_{jik_1}^{(k-1)}$ – коэффициенты кусочно-линейной интерполяции эпюры нормальных напряжений в i-й ветви.

При известных величинах $M_{xj}^{(k-1)}$ и $P_j^{(k-1)}$ с помощью формул (7)–(9) в j-м поперечном сечении находятся по (6) относительные деформации $\varepsilon_{1j}^{(k-1)}$ и $\varepsilon_{2j}^{(k-1)}$ и далее по (3) определяется величина $E_{equ,j}^{(k)}$.

Ниже представлены выражения для определения $M_{xj}^{ins(k)}$ и $P_j^{ins(k)}$ для арки из материала, имеющего билинейную диаграмму «напряжения – относительные деформации» с коэффициентом линейного упрочнения, равным

$$\psi=E_1/E, \quad (10)$$

где E – модуль упругости Юнга; E_1 – модуль деформаций материала арки в пластической области.

Для арки из указанного материала, имеющей одинаковые пояса швеллерообразного поперечного сечения, при развитии пластических деформаций по высоте сжатого пояса усилия в j-м сечении арки будут равны

$$\begin{aligned} P_j^{ins} &= E\Delta\varepsilon_j\{h_{ch,j}t_{wj}(4\Delta e_{pj} - 2h_j + 2\Delta e_j + t_{wj}) + \\ &+ 2t_{fj}[2(b_{fj} - t_{wj})(2\Delta e_{pj} - h_j + 2t_{wj}) + \\ &+ (\Delta e_j - t_{wj})(4b_{fj} - 3t_{wj} - \Delta e_j)] + \\ &+ \psi[h_{ch,j}t_{wj}(2\Delta e_j - t_{wj}) + 2t_{fj}(\Delta e_j - t_{wj})^2]\}/2h_j, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} M_{xj}^{ins} &= E\Delta\varepsilon_j\{h_{ch,j}t_{wj}[6(h_j - t_{wj})(h_j - \Delta e_j) - \\ &- t_{wj}(3h_j - 4t_{wj})] + 2t_{fj}[8(b_{fj} - t_{wj})^3 + \\ &+ 6(b_{fj} - t_{wj})(h_j - 2t_{wj})(h_j - 2t_{wj} - 2t_{fj}) - \\ &- (\Delta e_j - t_{wj})^2(3h_j - 4t_{wj} - 2\Delta e_j)] + \\ &+ \psi\{h_{ch,j}t_{wj}[6h\Delta e_j - t_{wj}(3h_j - 4t_{wj} + 6\Delta e_j)] + \\ &+ 2t_{fj}(\Delta e_j - t_{wj})^2(3h_j - 4t_{wj} - 2\Delta e_j)\}\}/12h_j, \end{aligned} \tag{12}$$

где $h_{ch,j}$, b_{fj}, t_{wj} и t_{fj} – соответственно высота поперечного сечения, ширина полки, толщина стенки и толщина полки швеллерообразного пояса j-го поперечного сечения арки;

$$\Delta e_j = (\varepsilon_{1j} - \varepsilon_p)h/\Delta\varepsilon_j, \ \Delta e_{pj} = \varepsilon_p h/\Delta\varepsilon_j, \tag{13}$$

здесь ε_p – линейная относительная деформация, соответствующая нормальному напряжению, равному пределу текучести.

В (2) выражения для определения центральных конечных разностей имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \Delta v_{\theta,j}^{(k)} &= (v_{\theta,j+1}^{(k)} - v_{\theta,j-1}^{(k)})/2, \\ \Delta^2 v_{\theta,j}^{(k)} &= v_{\theta,j+1}^{(k)} - 2v_{\theta,j}^{(k)} + v_{\theta,j-1}^{(k)}, \\ \Delta^3 v_{\theta,j}^{(k)} &= (v_{\theta,j+2}^{(k)} - 2v_{\theta,j+1}^{(k)} + 2v_{\theta,j-1}^{(k)} - v_{\theta,j-2}^{(k)})/2, \\ \Delta^5 v_{\theta,j}^{(k)} &= (v_{\theta,j+3}^{(k)} - 4v_{\theta,j+2}^{(k)} + 5v_{\theta,j+1}^{(k)} - \\ &- 5v_{\theta,j-1}^{(k)} + 4v_{\theta,j-2}^{(k)} - v_{\theta,j-3}^{(k)})/2. \end{aligned} \tag{14}$$

Условия, учитывающие опирание арки, строятся с использованием функции радиальных перемещений $w_{\theta,j}^{(k)}$, которая связана с касательными перемещениями зависимостью

$$w_{\theta,j}^{(k)} = v_{\theta,j}'^{(k)} + r^2[\xi_{\theta,j}^{(k)} - (v_{\theta,j}'''^{(k)} + v_{\theta,j}'^{(k)})/R]/R. \tag{15}$$

Для узлов опирания с номерами $j = 0$ и $j = n$ имеем

$$w_{\theta,o}^{(k)} = 0, \ \Delta^2 w_{\theta,o}^{(k)} = 0, \ w_{\theta,n}^{(k)} = 0, \ \Delta^2 w_{\theta,n}^{(k)} = 0. \tag{16}$$

Выражения для определения $\Delta^2 w_{\theta,o}^{(k)}$ и $\Delta^2 w_{\theta,n}^{(k)}$ получаются аналогично выражениям (14), но при этом для опоры с $j = 0$ используются правые конечные разности, а для опоры с $j = n$ – левые.

Решение системы разностных уравнений (2) позволит далее определить усилия и углы поворота $\beta_{\theta,j}^{(k)}$ j-го сечения арки по формулам

$$M_{xj}^{(k)} = -E_{equ,j}^{(k)}J_{xj}(\Delta^3 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^3 + \Delta v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi)/R^2, \tag{17}$$

$$Q_{yj}^{(k)} = -E_{equ,j}^{(k)}J_{xj}(\Delta^4 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^4 + \Delta^2 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^2/R^3), \tag{18}$$

$$N_j^{(k)} = N_c^{(k)} - E_{equ,j}^{(k)}J_{xj}(\Delta^3 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^3 + \Delta v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi)/R^3), \tag{19}$$

$$\beta_{\theta,j}^{(k)} = (\Delta^2 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^2 + v_{\theta,j}^{(k)})/R. \tag{20}$$

Связь между перемещениями узлов арки и краевыми относительными линейными деформациями в j-м сечении арки выражается формулой

$$(\Delta^3 v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi^3 + \Delta v_{\theta,j}^{(k)}/\varphi)/R^2 = -\Delta\varepsilon_j^{(k)}/h_j. \tag{21}$$

Зная (17) и (18), можно определить горизонтальную и вертикальную опорные реакции в узловой точке с номером j = 0 по формулам

$$H_o^{(k)} = N_o^{(k)}\cos(\alpha_o^{(k)} - \beta_{\theta,o}^{(k)}) + Q_{yo}^{(k)}\sin(\alpha_o^{(k)} - \beta_{\theta,o}^{(k)}), \tag{22}$$

$$V_o^{(k)} = N_o^{(k)}\sin(\alpha_o^{(k)} - \beta_{\theta,o}^{(k)}) - Q_{yo}^{(k)}\cos(\alpha_o^{(k)} - \beta_{\theta,o}^{(k)}), \tag{23}$$

где $\alpha_o^{(k)}$ – угол между касательной к оси арки в узловой точке с номером j = 0 и полярной осью.

С учетом ранее принятых обозначений проварьированная система уравнений равновесия примет вид

$$\begin{aligned} &[H_o + (V_o - G_j)ctg(\beta_{\theta,j} + \theta_j)\cos(\beta_{\theta,j} + \theta_j)]\delta\beta_{\theta,j} + \\ &+ [\delta H_o + (V_o - G_j^q)\csc^2(\beta_{\theta,j} + \\ &+ \theta_j)\sin(\beta_{\theta,j} + \theta_j)\delta\beta_{\theta,j}] - \delta P_j^{ins} = 0, \\ &[\delta H_o(R - w_j + v_j) - H(\delta w_{\theta,j} - \delta v_{\theta,j})]\sin\theta_j + \\ &+ V_o\cos\theta_j(\delta w_{\theta,j} - \delta v_{\theta,j}) + \partial M_{xj}^{ins} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где G_j^q – главный вектор внешней нагрузки, приложенной к части арки, отделенной j-м сечением;

$$\delta M_{xj}^{ins} = \frac{\partial M_{xj}^{ins}}{\partial\varepsilon_{1j}}\delta\varepsilon_{1j} + \frac{\partial M_{xj}^{ins}}{\partial\varepsilon_{2j}}\delta\varepsilon_{2j}, \tag{25}$$

$$\delta P_j^{ins} = \frac{\partial P_j^{ins}}{\partial\varepsilon_{1j}}\delta\varepsilon_{1j} + \frac{\partial P_j^{ins}}{\partial\varepsilon_{2j}}\delta\varepsilon_{2j}. \tag{26}$$

Для вышеописанной арки, выполненной из материала с линейным упрочнением, выражения (25) и (26) при развитии пластических деформаций по высоте сжатого пояса арки примут вид

$$\frac{\partial P_j^{ins}}{\partial \varepsilon_{1j}} = E\Delta\varepsilon_j\{h_{ch,j}t_{wj}(\Delta\overline{\varepsilon}_j - 2\Delta\overline{e}_{pj} - \Delta\overline{e}_j) + t_{fj}[-4(b_{fj} - t_{wj})\Delta\overline{e}_{pj} + 2(\Delta\overline{\varepsilon}_j - \Delta\overline{e}_j)(2b_{fj} - t_{wj} - \Delta e_j)] + \\ + \psi(\Delta\overline{\varepsilon}_j - \Delta\overline{e}_j)[h_{ch,j}t_{wj} + 2t_{fj}(\Delta\overline{e}_j - t_{wj})]\} / h_j + P_j^{ins} / \Delta\varepsilon_j, \tag{27}$$

$$\frac{\partial P_j^{ins}}{\partial \varepsilon_{2j}} = E\Delta\varepsilon_j\{h_{ch,j}t_{wj}(2\Delta\overline{e}_{pj} + \Delta\overline{e}_j) + 2t_{fj}[2(b_{fj} - t_{wj})\Delta\overline{e}_{pj} + \Delta\overline{e}_j(2b_{fj} - t_{wj} - \Delta e_j)] + \\ + \psi 2\Delta\overline{e}_j[h_{ch,j}t_{wj} + 4t_{fj}(\Delta e_j - t_{wj})]\} / h_j + P_j^{ins} / \Delta\varepsilon_j, \tag{28}$$

$$\frac{\delta M_{xj}^{ins}}{\partial \varepsilon_{1j}} = E\Delta\varepsilon_j(\Delta\overline{e}_j - \Delta\overline{\varepsilon}_j)\{[h_{ch,j}t_{wj}(h_j - t_{wj}) + 2t_{fj}(\Delta e_j - t_{wj})(h_j - \\ - t_{wj} - \Delta e_j)](1+\psi)\}/(2h_j) + M_{xj}^{ins} / \Delta\varepsilon_j, \tag{29}$$

$$\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_1 - \varepsilon_p, \tag{30}$$

где $\Delta\overline{\varepsilon}_j = h_j / \Delta\varepsilon_j$, $\Delta\overline{e}_{pj} = (\varepsilon_{1j} - \varepsilon_p)h_j / \Delta\varepsilon_j^2$.

Определитель системы (24), составленный, с учетом (21), из коэффициентов при вариациях независимых переменных решаемой задачи, представляет собой функционал потери устойчивости. Обращение в нуль этого функционала или смена знака его численного значения при подстановке в него параметров напряженно-деформированного состояния, полученного при решении уравнения (2), свидетельствуют о критическом состоянии составной арки. Если устойчивость арки обеспечена, то производится перерасчет величины $E_{equ,j}^{(k)}$ для следующего этапа нагружения арки и вновь производится ее деформационный расчет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 61–73.
2. Дривинг А. Я. К теории расчета круговых арок с учетом осевых деформаций // Металлические конструкции и испытания сооружений: Межвузовский тематический сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1979. С. 50–60.
3. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 472 с.
4. Рочев А. А. Исследование несущей способности сквозных упругопластических статически неопределимых рам переменного сечения // Труды молодых ученых: В 3 ч. Ч. 3. СПб.: СПбГАСУ, 2000. С. 187–192.
5. Санжаровский Р. С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 280 с.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОГИЗ – Гостехиздат, 1946. С. 133.