УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Сентябрь, № 9 Технические науки 2009

УДК 534.014.4

АНАТОЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ КОЙБИН
кандидат технических наук, доцент кафедры механики строительного факультета ПетрГУ
kabs@karelia.ru

ВИБРАЦИИ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ И ВНЕШНЕМ ТРЕНИИ

В работе рассматривается задача о вынужденных крутильных колебаниях в упругом полубесконечном стержне под воздействием случайного возмущения на торце стержня и наличия внешнего сухого трения.

Ключевые слова: вибрации, случайное воздействие, математическое ожидание, линеаризация

Для контактных поверхностей полагаем справедливым закон Кулона, а для материала стержня – закон Гука [2], [4]. Поставленная задача решается с использованием приближенных методов статистической линеаризации и одной из модификаций асимптотического метода Крылова – Боголюбова [1]. Применение этих методов позволило получить аналитические выражения вибраций стержня, а также проследить за изменением гистерезисных потерь в зависимости от внешнего воздействия и степени контакта поверхностей.

1. Рассмотрим полубесконечный круглый стержень, взаимодействующий с внешней средой сухим трением и находящийся на конце (x = 0) под воздействием стационарной случайной нагрузки с математическим ожиданием, равным нулю.

Уравнение динамики стержня имеет вид

$$J\rho\ddot{\varphi} - GJ\varphi'' = -m\,sign\dot{\varphi}\,. \qquad (1.1)$$

Здесь $\varphi(x,t)$ – угол поворота сечения с координатой x, G – модуль сдвига, J – полярный момент инерции, ρ – плотность материала. Штрихом и точкой обозначены частные производные по координате x и времени t, m – интенсивность крутящего момента сил трения, отнесенная к единице длины стержня.

$$m = 2\pi R^2 q, \qquad q = fp, \qquad (1.2)$$

где R – радиус цилиндрической поверхности стержня, q – предельное значение сил трения, f – коэффициент трения, p – нормальное давление на поверхности контакта. При этом принимается, что нормальное давление на поверхности контакта не изменяется ни при нагружении, ни по длине. Это предположение вполне приемлемо в задачах о кручении [1], [2].

Нагрузку, действующую на торце стержня (крутящий момент), зададим в виде ее спектрального разложения

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega)\, d\omega, \qquad (1.3)$$

где V(ω) – белый шум, интенсивность которого равна спектральной плотности S(ω) случайной функции $M(t)$.

Для решения задачи воспользуемся приближенным методом, основанным на методе статистической линеаризации [1], [3]. В соответствии с этим методом нелинейную функцию в правой части уравнения (1.1) заменим линейной

$$m\,sign\dot{\varphi} \approx k\dot{\varphi}\,. \qquad (1.4)$$

Коэффициент линеаризации k выбираем из условия минимума среднеквадратической ошибки от замены нелинейной функции приближенной линейной. Его выражение таково [5].

$$k = \frac{1}{\sigma_v^2}\int_{-\infty}^{\infty} m v w(v) sign\, v\, dv. \qquad (1.5)$$

Здесь $v = \dot{\varphi}$ – скорость углового перемещения сечения стержня, σ_v и $W(v)$ – ее среднеквадратическое значение и плотность вероятности; при этом учтено, что для стационарного процесса математическое ожидание M_v равно нулю.

Закон распределения плотности вероятности $W(v)$ неизвестен до решения задачи в целом, и его полагаем нормальным [1], [3].

$$W(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_v} exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right). \qquad (1.6)$$

Вычисляя коэффициент статистической линеаризации по формуле (1.5), получаем

$$k = \frac{2m}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}. \qquad (1.7)$$

Тогда уравнение (1.1) запишем в форме

$$\ddot{\varphi} - c^2\varphi'' + \frac{h}{\sigma_v}\dot{\varphi} = 0\,,\ c^2 = G/\rho\,,\ h = \frac{2m}{\sqrt{2\pi}J\rho}. \qquad (1.8)$$

Решение уравнения (1.8) будем разыскивать в виде интегрального канонического представления по аналогии с (1.3):

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} exp\{\imath[\omega t - \varphi(\omega,x)]\} a(x,\omega) V(\omega) d\omega. \qquad (1.9)$$

Предполагая вибрации стержня медленно меняющимися по координате и исследуя стационарные процессы, положим [1]

$$a' = \varepsilon A(x);\ \ \psi' = \alpha + \varepsilon\mu(x);\ \ \alpha = \frac{\omega}{c}; \qquad (1.10)$$

причем ε – малый параметр.

Подставив искомое решение (1.9) в (1.8) и приравняв к нулю действительную и мнимую части, получим уравнения для определения неизвестных функций a и ψ. При этом содержащиеся в (1.8) производные должны быть вычислены при помощи соотношения (1.10) с точностью до величин первого порядка малости.

$$a' + \frac{ha}{2c\sigma_v} = 0\ ; \qquad \psi' = \alpha, \qquad (1.11)$$

где неизвестен до решения задачи характер распределения σ_v по сечениям x. Анализируя распространение поля вибраций по длине стержня, можно заметить, что σ_v изменяется, уменьшаясь при удалении от нагруженного конца стержня. В рассматриваемом случае поле вибраций будет слабооднородным, поэтому естественно предположить

$$\sigma_v = \sigma_0 - \gamma x\,. \qquad (1.12)$$

Здесь σ_0 и γ – параметры, подлежащие определению. Тогда решением системы (1.11) будут функции

$$a = \xi(\sigma_0 - \gamma x);\ \ \psi = \psi_0 + \alpha x;\ \ \gamma = \frac{h}{2c}, \qquad (1.13)$$

где ξ и ψ_0 – постоянные интегрирования, которые находятся из граничного условия:

$$-GJ\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) d\omega\,. \ (x = 0) \qquad (1.14)$$

Подставив найденные выражения (1.13) в (1.9), запишем для углов поворота сечений:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} exp[i(\omega t - \psi_0 - \alpha x)]\xi(\sigma_0 - \gamma x) V(\omega) d\omega\,. \qquad (1.15)$$

Решение (1.15) тождественно удовлетворяет линеаризованному уравнению (1.11). Отметим, что полученное решение справедливо для той области стержня, где среднеквадратическое значение σ_v, определяемое зависимостью (1.12), положительно, то есть для области, определяемой неравенством $0 < x < x_* = \sigma_0/\gamma$.

Удовлетворяя граничному условию (1.14), получим:

$$\xi = \frac{1}{GJ\sqrt{\alpha^2\sigma_0^2 + \gamma^2}}\ ;\ \psi_0 = arctg\frac{\alpha\sigma_0}{\gamma}\,. \qquad (1.16)$$

По найденному каноническому представлению решения (1.15) можно определить скорости поворота сечений и их средние квадраты:

$$\sigma_v^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma_0 - \gamma x)^2 \omega^2 \xi^2 S(\omega) d\omega. \qquad (1.17)$$

Уравнение (1.17) служит для определения σ_0 – среднеквадратического значения σ_v в сечении x = 0. Учитывая выражения (1.16), из (1.17) получаем уравнение для отыскания σ_0:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S(\omega)}{(GJ)^2(\alpha^2\sigma_0^2 + \gamma^2)} d\omega = 1. \qquad (1.18)$$

Интегрирование по частоте в (1.18) можно осуществить для широкого класса спектральных плотностей нагрузки. Например, если

$$S(\omega) = \frac{D}{\pi}\frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2};\ D > 0;\ \beta > 0, \qquad (1.19)$$

то уравнение (1.18) можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2 + b^2)(\omega^2 + \beta^2)} d\omega = \frac{(GJ)^2\sigma_0^2\pi}{c^2\beta D}; \quad b^2 = \frac{\gamma c}{\sigma_0}. \qquad (1.20)$$

Вычисляя интеграл при помощи теории вычетов, придем к квадратному уравнению относительно σ_0:

$$\sigma_0^2 + \frac{\gamma c}{\beta}\sigma_0 - \frac{c^2 D}{(GJ)^2} = 0. \qquad (1.21)$$

Из двух корней уравнения (1.21) выбираем заведомо положительный:

$$\sigma_0 = -\frac{\gamma c}{2\beta} + \sqrt{\frac{\gamma^2 c^2}{4\beta^2} + \frac{c^2 D}{(GJ)^2}}. \qquad (1.22)$$

Запишем выражение для координаты, определяющей границу распространения поля вибраций в зависимости от интенсивности крутящего момента m, положив в (1.12) $\sigma_v = 0$:

$$x_* = \frac{\sigma_0}{\gamma} = -\frac{c}{2\beta} + \sqrt{\frac{c^2}{4\beta^2} + \frac{2\pi D}{m^2}}. \qquad (1.23)$$

Отсюда видно, что при увеличении момента сил трения, приходящегося на единицу длины стержня, вибрации локализуются в сечении $x = 0$, а при уменьшении значения m зона распространения вибраций расширяется.

2. Рассмотрим определение необратимых потерь, совершаемых случайным воздействием. Эти потери могут быть оценены средним значением по времени работы возмущающего момента, действующего на торце стержня:

$$\psi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T M(t)\frac{\partial\varphi}{\partial t} dt;\ (x = 0), \qquad (2.1)$$

или же потери могут быть оценены средним значением по времени работы линеаризованных сил трения в зоне распространения вибраций, которые можно определить, пользуясь выражением

$$\psi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^{X*} mk\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 dx dt, \qquad (2.2)$$

где k – коэффициент статистической линеаризации, определяемый по (1.5).

$$\psi = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^{X*} \frac{2m}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 dx dt. \qquad (2.3)$$

Применим к (2.3) операцию математического ожидания:

$$M[\psi] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^{X*} \frac{2m}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} M\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] dx dt. \qquad (2.4)$$

Учтем, что $M[(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^2] = \sigma_v^2 = (\sigma_0 - \gamma x)^2$.

Получим

$$M[\psi] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^{X*} \frac{2m}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_0 - \gamma x) dx dt = \sigma_0^2 cJ\rho. \qquad (2.5)$$

Из (2.5) видно, что для стационарного случайного воздействия площадь гистерезисной петли постоянна и с течением времени не изменяется. При m = 0 потери (2.5) выражаются: $M[\psi] = cD/GJ$, это та часть работы случайного воздействия, которая расходуется на то, чтобы распространять случайные вибрации в бесконечность при отсутствии сил трения. По мере увеличения сил трения среднее значение потерь стремится к нулю. Полученными результатами можно воспользоваться для анализа вибраций в стержне конечной длины l. При заданной длине стержня существует минимальное значение момента трения m, при котором случайные вибрации не распространяются дольше l, то есть $x_* \le l$. Положив в (1.23) $x_* = l$, найдем

$$m = \sqrt{\frac{2\pi D\beta}{(\beta l + c)l}}\ . \tag{2.6}$$

В таком соотношении должны находиться минимальное допустимое значение момента сил трения, отнесенного к единице длины стержня, и параметры D и β случайного воздействия, чтобы не происходило полного прокручивания стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. М.: Машиностроение, 1968. С. 65–72.
2. Миронов М. В. О распространении в стержнях продольных колебаний с медленно меняющимися параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 91–96.
3. Пальмов В. А. Распространение вибраций в нелинейной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 749–756.
4. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
5. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М.: Физматгиз, 1960. 883 с.