Декабрь, № 8. Т. 2 **Физико-математические науки** **2014**

УДК 515.1

ЕЛЕНА ВИКТОРОВНА КАШУБА
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике и ИКТ в образовании математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
finder_@bk.ru

ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА СТЕПАНОВА
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и топологии математического факультета, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация)
elena_stepanova@mail.ru

О ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ИНВАРИАНТНЫМ ПРОДОЛЖЕНИЕМ НА КАТЕГОРИЮ TYCH

Следуя конструкции Чигогидзе, строится продолжение полунормального функтора F с категории Comp на категорию Tych. При изучении свойств продолжения функтора важную роль играет наличие гомеоморфного отображения $F(f)|_{F_\beta(X)}$ между пространствами $F_\beta(X)$ и $F_b(X)$, где $F_\beta(X)$ – это множество всех точек $\xi \in F(\beta X)$, носитель которых лежит в X; аналогично определяется $F_b(X)$ как подпространство пространства $F(bX)$; $f:\beta X \to bX$ – естественное отображение стоун-чеховского расширения βX на компактное расширение bX. Поэтому будем говорить, что функтор F обладает инвариантным продолжением на категорию Tych, если для любого тихоновского пространства X и любого его компактного расширения bX отображение $F(f)|_{F_\beta(X)}$ является гомеоморфизмом. Получен критерий инвариантности продолжения для полунормальных функторов конечной степени. Кроме того, доказано, что при $n \geq 4$ полунормальный функтор со степенным спектром $spF = \{1;n\}$ не обладает инвариантным продолжением. В заключении статьи приведены примеры функторов λ_3 и μ таких, что $sp\lambda_3 = sp\mu = \{1;3\}$, но при этом λ_3 обладает инвариантным продолжением, а μ не обладает.

Ключевые слова: компактное расширение, продолжение по Чигогидзе, функтор, обладающий инвариантным продолжением

В статье А. Ч. Чигогидзе [6] предложена конструкция продолжения нормального функтора с категории Comp всех компактов и их непрерывных отображений на категорию Tych тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Ключевой вопрос при этом: как связаны свойства продолжения со свойствами самого функтора?

В данной статье вводится понятие инвариантности продолжения функтора. При этом всякий нормальный функтор в категории Comp обладает инвариантным продолжением на Tych, и именно это обеспечивает свойство непрерывности продолжения такого функтора [6; 24]. Основной результат работы – это критерий инвариантности продолжения для полунормальных функторов конечной степени (теорема 1).

Пусть $F: Comp \to Comp$ – произвольный полунормальный функтор. Для всякого тихоновского пространства X, следуя Чигогидзе, положим

$$F_\beta(X) = \{\xi \in F(\beta X) : supp\,\xi \subset X\},$$

где βX – стоун-чеховская компактификация пространства X, $supp\,\xi$ – носитель точки ξ [7; 22]. Для тихоновских пространств X и Y и непрерывного отображения $f: X \to Y$ определим $F_\beta(f) = F(\beta f)|_{F_\beta(X)}$, где $\beta f: \beta X \to \beta Y$ – чеховское продолжение отображения f. Нетрудно убедиться в корректности определения отображения $F_\beta(f)$. Для этого достаточно проверить включение $F(\beta f)(F_\beta(X)) \subset F_\beta(Y)$, используя свойство носителей для полунормального функтора F: $g(supp\,\xi) \supset supp(F(g)(\xi))$, где $g: Z \to T$ – непрерывное отображение компактов и $\xi \in F(Z)$ [5; 166]. Таким образом, конструкцию продолжения функтора по Чигогидзе можно применить к полунормальным функторам.

При установлении непрерывности продолжения нормального функтора F ключевую роль играет наличие естественного гомеоморфизма между пространствами $F_\beta(X)$ и $F_b(X) = \{\xi \in F(bX) : supp\,\xi \subset X\}$, где bX – произвольное компактное расширение X (см. предложение 1 [6; 24]). Результатом анализа этого факта является следующее

Определение. Пусть $F: Comp \to Comp$ – полунормальный функтор, bX – произвольная компактификация тихоновского пространства X и $f: \beta X \to bX$ – естественное отображение [1; 106]. Будем говорить, что функтор F *обладает инвариантным продолжением на категорию Tych*, если для любого тихоновского пространства X и любого его компактного расширения bX отображение $F(f)|_{F_\beta(X)}$ является гомеоморфизмом между пространствами $F_\beta(X)$ и $F_b(X)$.

Для доказательства основных результатов нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Предложение 1. Пусть X, Y – компакты, $f: X \to Y$ – непрерывное отображение, A – всюду плотное подмножество X, $B \subset Y$ и $f|_A: A \to B$ – биекция. Отображение $f|_A$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда $f(\xi) \notin B$ для любой точки $\xi \in X \setminus A$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $f|_A$ – гомеоморфизм, но при этом найдется точка $\xi \in X \setminus A$, такая, что $f(\xi) = b \in B$. Так как $f|_A$ – биекция, то $f(\xi) = f(a) = b$ для некоторой точки $a \in A$. Пусть Oa и $O\xi$ – непересекающиеся окрестности точек a и ξ в X. Поскольку $f|_A$ – открытое отображение, множество $f|_A(Oa \cap A) = U_B(b)$ – окрестность точки b в B. Пусть $U(b)$ – открытое в Y множество, такое, что $U_B(b) = U(b) \cap B$. В силу непрерывности f для точки ξ найдется окрестность $O'\xi \subset O\xi$, удовлетворяющая условию $f(O'\xi) \subset U(b)$. Легко проверить, что $\varnothing \neq f|_A(O'\xi \cap A) \subset U_B(b)$. А значит, $f|_A(O\xi \cap A) \cap f|_A(Oa \cap A) \neq \varnothing$, что противоречит биективности $f|_A$.

Достаточность. Пусть $f(\xi) \notin B$ для любого $\xi \in X \setminus A$. Чтобы показать, что $f|_A$ является гомеоморфизмом, достаточно проверить замкнутость отображения $f|_A$, которая сразу следует в этом случае из замкнутости f. □

В дальнейших рассуждениях через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек. Отображение Басманова [3]

$$\pi_n: X^n \times F(n) \to F(X)$$

для полунормального функтора F и компакта X определяется равенством $\pi_n(x,\xi) = F(x)(\xi)$, в котором каждая точка $x \in X^n$ отождествляется с отображением $x: n \to X$. Отображение π_n непрерывно и $Im\pi_n = F_n(X)$, где $F_n(X) = \{\xi \in F(X): |supp\xi| \le n\}$. В случае $deg F = n$ отображение π_n является отображением «на» [8; 129].

Предложение 2. Если $F: Comp \to Comp$ – полунормальный функтор и $degF = n$, то $F_b(X)$ всюду плотно в $F(bX)$ для любого тихоновского пространства X и любого его компактного расширения bX.

Доказательство. Выберем произвольно точку $\xi \in F(bX)$ и ее окрестность $O\xi$ в $F(bX)$. Рассмотрим отображение Басманова

$$\pi_n: (bX)^n \times F(n) \to F(bX).$$

Отображение π_n сюрьективно, значит, существует точка $t = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \eta)$, такая, что $\pi_n(t) = \xi$. Поскольку π_n непрерывно, то найдется Ot – окрестность точки t, для которой $\pi_n(Ot) \subset O\xi$. Очевидно, окрестность Ot содержит некоторое множество $T = Oy_1 \times Oy_2 \times \ldots \times Oy_n \times \{\eta\}$. Пространство X всюду плотно в bX, значит, для любого $i = 1, \ldots, n$ существует точка $x_i \in Oy_i \cap X$. Нетрудно проверить, что $\xi_1 = \pi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \eta) \in O\xi$ и $supp\,\xi_1 \subset X$, т. е. $\xi_1 \in F_b(X)$. □

Для любых k и m, таких, что $0 \le k < m$, определим отображение $g_k^m: m \to m$, которое действует по правилу $g_k^m(i) = i$ при $i = 0, \ldots, k-1$ и $g_k^m(j) = k$ при $j = k, \ldots, m-1$.

Теорема 1. Полунормальный функтор $F: Comp \to Comp$ конечной степени обладает инвариантным продолжением на категорию Tych тогда и только тогда, когда для любой точки $\xi \in F(n)$ с носителем $supp\xi = m \subset n$ $(m \ge 2)$ и для любого $0 \le k \le m-2$ выполняется условие $supp\,F(g_k^m)(\xi) \not\subset k^1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(f)|_{F_\beta(X)}$ – гомеоморфизм для любого тихоновского пространства X и любого его компактного расширения bX. Допустим, что найдутся точка $\xi \in F(n)$ с носителем $supp\,\xi = m \subset n$ и число $k \le m-2$, такие, что $supp\,F(g_k^m)(\xi) \subset k = \{0, \ldots, k-1\}$.

Возьмем в качестве X счетное дискретное пространство N. В βN выберем m-элементное множество следующим образом: $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\} \subset N \subset \beta N$, $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}\} \subset \beta N \setminus N$. Рассмотрим фактор-пространство βN по разбиению, единственным нетривиальным элементом которого является множество $\{x_k, \ldots, x_{m-1}\}$. Очевидно, что это фактор-пространство является компактным расширением bN, а факторное отображение $f: \beta N \to bN$ – естественным отображением компактных расширений. Точку $\{x_k, \ldots, x_{m-1}\} \in bN$ будем обозначать через x_k. Покажем, что $F(f)|_{F_\beta(N)}$ не является гомеоморфизмом.

Пусть $x: m \to \beta N$ действует по правилу $x(i) = x_i$ для $i = 0,\ldots,m-1$, $h:\{x_0,\ldots,x_k\} \to (k+1) \subset m$ – по правилу $h(x_i) = i$ для $i = 0,\ldots,k$. Пусть $\hat{f} = f|_{\{x_0,\ldots,x_{m-1}\}}$, тогда $h \circ \hat{f} \circ x : m \to m$, причем $h \circ \hat{f} \circ x = g_k^m$. Положим $\xi' = F(x)(\xi) \in F(\beta N)$, $\eta' = F(\hat{f})(\xi') \in F(\{x_0,\ldots,x_k\})$, $\eta = F(h)(\eta') \in F(m)$, то есть $\eta = (F(h) \circ F(\hat{f}) \circ F(x))(\xi)$. При этом $supp\,\xi = m = \{0,\ldots,m-1\}$, $supp\,\eta \subset k = \{0,\ldots,k-1\}$. Значит, $supp\,\xi' = \{x_0,\ldots,x_{m-1}\}$ и $supp\,\eta' \subset \subset \{x_0,\ldots,x_{k-1}\} \subset N$. Таким образом, $\eta' \in F_b(N)$. Это значит, что точка $\xi' \in F(\beta N) \setminus F_\beta(N)$ при отображении $F(f)$ переходит в точку $\eta' \in F_b(N)$, и, следовательно, согласно предложению 1, $F(f)|_{F_\beta(N)}$ не является гомеоморфизмом.

Достаточность. Пусть для любого $\xi \in F(n)$ с носителем $supp\,\xi = m \subset n$ и для любого $k \le m-2$ выполняется $supp\,F(g_k^m)(\xi) \not\subset k = \{0,\ldots,k-1\}$, при этом для некоторого тихоновского пространства X и некоторого компактного расширения bX отображение $F(f)|_{F_\beta(X)}$ – не гомеоморфизм. Тогда существует точка $\xi' \in F(\beta X) \setminus F_\beta(X)$, такая, что $\eta' = F(f)(\xi') \in \in F_b(X)$. Носитель $supp\,\xi' = \{x_0,\ldots,x_{k-1}, x_k,\ldots,x_{m-1}\}$, где $\{x_0,\ldots,x_{k-1}\} \subset X$ и $\{x_k,\ldots,x_{m-1}\} \subset \subset \beta X \setminus X$, причем $k \ge 1, m \ge 3$. Тогда $f(supp\,\xi') = \{x_0,\ldots,x_{k-1}, y_1\ldots,y_l\}$, где $y_i \in bX \setminus X$, $i = 1,\ldots,l$ и $l < m-k$. Поскольку $supp\,\eta' \subset f(supp\,\xi') \cap X$, то $supp\,\eta' \subset \{x_0,\ldots,x_{k-1}\}$. Теперь рассмотрим отображения $x: m \to \beta X$, действующее по правилу $x(i) = x_i$ для $i = 0,\ldots,m-1$, и $g:\{x_0,\ldots,x_{k-1},y_1,\ldots,y_l\} \to m$, для которого $g(x_i) = i$ при $i = 0,\ldots,k-1$ и $g(y_j) = k$ при $j = 1,\ldots,l$. Пусть точка $\xi \in F(m)$ такая, что $F(x)(\xi) = \xi'$, и $\eta = F(g)(\eta')$. При этом $supp\,\xi = m = \{0,\ldots,m-1\}$, $supp\,\eta \subset k = \{0,\ldots,k-1\}$. Но $g \circ f|_{\{x_0,\ldots,x_{m-1}\}} \circ x = g_k^m$, значит, $\eta = F(g_k^m)(\xi)$, что противоречит условию $supp\,F(g_k^m)(\xi) \not\subset k$. □

Теорема 2. Всякий полунормальный функтор $F: Comp \to Comp$ со степенным спектром $sp\,F = \{1;n\}$[2] не обладает инвариантным продолжением на категорию Tych при $n \ge 4$.

Доказательство. Допустим, что $F(f)|_{F_\beta(X)}$ является гомеоморфизмом для любого тихоновского пространства X и любого bX, тогда по теореме 1 для любой точки $\xi \in F(n)$, $|supp\,\xi| = m$ и любого $k \le m-2$ выполняется условие $supp\,F(g_k^m)(\xi) \not\subset k$.

Выберем некоторую точку $\xi \in F(n)$ с $supp\,\xi = n$ и рассмотрим отображение $g_{n-2}^n : n \to n$. Положим, $\eta = F(g_{n-2}^n)(\xi)$. Получаем, что $supp\,\eta \subset g_{n-2}^n(n) = n-1$. Но $sp\,F = \{1;n\}$, следовательно, $|supp\,\eta| = 1$. По предположению, $supp\,\eta \not\subset \{0,1,\ldots,n-3\}$, следовательно, $supp\,\eta = \{n-2\}$, то есть $\eta = n-2 \in F(n)$[3]. Таким образом, все точки $\xi \in F(n)$ с n-точечным носителем переходят при отображении $F(g_{n-2}^n)$ в точку $n-2 \in F(n)$.

Возьмем отображение $h: n \to n$, действующее по правилу $h(0) = h(1) = 0$, $h(i) = i$ для $i > 1$. С помощью перестановок множества n из отображения g_{n-2}^n можно получить h. Поэтому для любой точки $\xi \in F(n)$ с $supp\,\xi = n$ верно $F(h)(\xi) = 0 \in F(n)$.

Заметим, что $g_{n-2}^n \circ h = h \circ g_{n-2}^n$. Тем не менее для любой точки $\xi \in F(n)$ с n-точечным носителем $supp\,F(g_{n-2}^n \circ h)(\xi) = \{0\}$ и $supp\,F(h \circ g_{n-2}^n)(\xi) = \{n-2\}$, что невозможно. □

Легко проверить, что любой полунормальный функтор F со степенным спектром $sp\,F = \{1;2\}$ обладает инвариантным продолжением с *Comp* на *Tych*. В случае $sp\,F = \{1;3\}$ ситуация неоднозначна: есть полунормальные функторы с инвариантным продолжением и функторы, не обладающие таким продолжением.

Согласно В. Н. Басманову [2], полунормальный функтор конечной степени полностью определен своим действием на категорию n, состоящую из единственного компакта n и всех отображений из n в n.

В работе [9] построен функтор μ со степенным спектром $sp\,\mu = \{1;3\}$[4]. Опишем действие μ на категорию 3: $\mu(3) = \{0,1,2,\xi\} \supset 3$; для каждого отображения $f: 3 \to 3$ полагаем $\mu(f)|_3 = f$; если f – биекция, то $\mu(f)(\xi) = \xi$; если f «склеивает» две точки, то $\mu(f)(\xi) = f(x)$, где $x \in 3$ и $|f^{-1}(f(x))| = 1$; если $f: 3 \to \{p\} \subset 3$ – постоянное отображение, то $\mu(f)(\xi) = p$.

Поскольку $supp\,\mu(g_1^3)(\xi) = \{0\}$, то, по теореме 1, существуют тихоновское пространство X и его компактное расширение bX, для которых отображение $\mu(f)|_{\beta(X)}$ не является гомеоморфизмом.

Второй пример – функтор λ_3 – подфунктор функтора суперрасширения λ [5; 156]. Функтор μ является в некотором смысле антиподом λ_3. Если $f: 3 \to 3$ «склеивает» две точки, то $\lambda_3(f)(\xi) = f(x)$, где $x \in 3$ такая, что $|f^{-1}(f(x))| = 2$. В этом случае $supp\lambda_3(g_1^3)(\xi) = \{1\} \not\subset \{0\}$, а значит, согласно теореме 1, $\lambda_3(f)|_{(\lambda_3)_\beta(X)}$ – гомеоморфизм для любого X и любого bX.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Заметим, что при $k = 0 = \emptyset$ условия теоремы выполняются автоматически.

[2] Определение степенного спектра см. в [4].

[3] Для любого функтора F выполнено $X \subset F(X)$, значит, $n \subset F(n)$ [7; 815].

[4] В [9] функтор μ обозначен через G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 577 с.
2. Басманов В. Н. Ковариантные функторы конечных степеней на категории бикомпактных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 3. С. 637–654.
3. Басманов В. Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. № 5. С. 1033–1036.
4. Иванов А. В., Кашуба Е. В. О наследственной нормальности пространств вида $F(X)$ // Сибирский мат. журнал. 2008. Т. 49. № 4. С. 813–824.
5. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 250 с.
6. Чигогидзе А. Ч. О продолжении нормальных функторов // Вестник МГУ. Сер 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 23–26.
7. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. 36. № 3. С. 3–62.
8. Fedorchuk V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. Vol. 76. P. 125–150.
9. Ivanov A. V., Kashuba E. V., Matyushichev K. V., Stepanova E. N. Functors and compact spaces of uncountable character // Topology and its Applications. 2013. Vol. 100. I. 13. P. 1606–1610.

Kashuba E. V., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)
Stepanova E. N., Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation)

ON THE SEMINORMAL FUNCTORS WITH INVARIANT EXTENSION TO THE TYCH CATEGORY

Using methods of Chigogidze, we can extense a seminormal functor acting in the category Comp to the category Tych. Researching the properties of this extension, we introduce the notion of a functor having an invariant extension to the category Tych. Let F be seminormal functor acting in the category Comp and X be Tychonoff space. By $F_\beta(X)$ we denote the subspace of $F(\beta X)$ consisting of all points ξ such that $supp\,\xi \subset X$. Let bX be a compactification of X. Put $F_b(X) = \{\xi \in F(bX) : supp\,\xi \subset X\}$. For the natural mapping $f: \beta X \to bX$ consider the mapping $F(f)|_{F_\beta(X)}: F_\beta(X) \to F_b(X)$. We say that the functor F has an invariant extension to the category Tych if the mapping $F(f)|_{F_\beta(X)}$ is a homeomorphism for any Tychonoff space X and its arbitrary compactification bX. We obtained the criterion of the invariant extension for a finite degree seminormal functor. We prove that any seminormal functor F with the degree spectrum $spF = \{1; n\}$ hasn't got an invariant extension for $n \geq 4$. For $n = 3$ there are the examples of the functors λ_3 and μ with the degree spectrum $sp\lambda_3 = sp\,\mu := \{1;3\}$ such that λ_3 has an invariant extension, and μ has not.

Key words: seminormal functor, compactification, Chigogidze extention of functors, functor with invariant extention

REFERENCES

1. Aleksandrov P. S., Pasynkov B. A. *Vvedenie v teoriyu razmernosti* [Introduction to Dimension Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 577 p.
2. Basmanov V. N. Covariant functors of finite degree on the category of Hausdorff compact spaces [Kovariantnye funktory konechnykh stepeney na kotegorii bikompaktnykh prostranstv]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 1996. Vol. 2. № 3. P. 637–654.
3. Basmanov V. N. Covariant functors, retracts, and dimension [Kovariantnye funktory, retrakty i razmernost']. *Doklady AN SSSR*. 1983. Vol. 271. № 5. P. 1033–1036.
4. Ivanov A. V., Kashuba E. V. Hereditary normality of a space of the form $F(X)$ [O nasledstvennoy normal'nosti prostranstv vida $F(X)$]. *Sibirskiy mat. zhurnal* [Siberian Mathematical Journal]. 2008. Vol. 49. № 4. P. 616–620.
5. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* [General Topology. Basic design]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1988. 250 p.
6. Chigogidze A. Ch. Extension of normal functors [O prodolzhenii normal'nykh funktorov]. *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika.* 1984. № 6. P. 23–26.
7. Shchepin E. V. Functors and uncountable degree of compacta [Funktory i neschetnye stepeni kompaktov]. *Uspekhi mat. nauk* [Russian Math. Surveys]. 1981. Vol. 36. № 3. P. 3–62.
8. Fedorchuk V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. Vol. 76. P. 125–150.
9. Ivanov A. V., Kashuba E. V., Matyushichev K. V., Stepanova E. N. Functors and compact spaces of uncountable character // Topology and its Applications. 2013. Vol. 100. I. 13. P. 1606–1610.

Поступила в редакцию 18.06.2014