УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ПЕТРОЗАВОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Декабрь, № 4 Технические науки 2008

УДК 624.014 .074 : 539.4

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ РОЧЕВ
кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, строительных конструкций и геотехники строительного факультета ПетрГУ
metalll@bk.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

Построена математическая модель, позволяющая выполнить деформационный расчет, проверить прочность и устойчивость нелинейно упругих стержневых плит и оболочек. Расчет базируется на использовании основных положений сплошных слоистых анизотропных гибких оболочек с применением полученных в работе эквивалентных жесткостных характеристик, учитывающих нелинейные свойства материала и влияние деформаций поперечного сдвига.

Ключевые слова: стержневые плиты и оболочки, нелинейно упругий материал, эквивалентные жесткостные характеристики, деформация поперечного сдвига

В работе рассматриваются металлические двухпоясные сетчатые оболочки, имеющие постоянную толщину. Поясные сетки соединены между собой системой раскосов, связывающих между собой узлы противолежащих сеток.

Пространственная стержневая система представляется при расчете как некоторая квазиконтинуальная среда. Поясные сетки заменяются эквивалентными сплошными слоями. Исследуется напряженно-деформированное состояние геометрически и физически нелинейной сдвигоподатливой оболочки. Предлагаемый метод расчета сквозных нелинейных оболочек базируется на использовании основных положений теории расчета сплошных слоистых анизотропных линейно-упругих гибких оболочек, абсолютно жестких на поперечный сдвиг [1].

Рассматривается ортотропная оболочка, отнесенная к триортогональной системе криволинейных координат α, β, γ. В работе используется гипотеза недеформируемых нормалей. Учет деформаций сдвига осуществляется способом, предложенным С. П. Тимошенко [3]. Материал стержней оболочки – нелинейно-упругий, для него устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжениями. Силовые и температурные деформации считаются аддитивными.

При расчете применяется шаговый режим загружения [2]. На первом шаге загружения для расчета сплошной сдвигоподатливой оболочки используются ее эквивалентные жесткостные характеристики, рассчитанные на основе знания свойств материала, соответствующих начальному отрезку кривой деформирования. После каждого *i*-го шага загружения на площадках главных нормальных сечений оболочки определяются внутренние силы и моменты (как в сплошной оболочке), включающие в себя тангенциальные силы, действующие в плоскости касательной к координатной поверхности оболочки, (нормальные $T_1^{(i)}$, $T_2^{(i)}$ и сдвигающие $S_{12}^{(i)}$, $S_{21}^{(i)}$), поперечные силы $Q_1^{(i)}$, $Q_2^{(i)}$ изгибающие моменты $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, крутящие моменты $H_{12}^{(i)}$, $H_{21}^{(i)}$, отнесенные к единице длины дуги соответствующих координатных линий.

Уравнения, устанавливающие связь между внутренними усилиями и деформациями растяжения и изгиба координатной поверхности (с учетом влияния изменения температуры), имеют вид

$$
\begin{aligned}
T_1^{(i)} &= C_{11}^{(i)}\varepsilon_1^{(i)} + C_{12}^{(i)}\varepsilon_2^{(i)} + K_{11}^{(i)}\chi_1^{(i)} + K_{12}^{(i)}\chi_2^{(i)} + C_{1T}^{(i)},\\
T_2^{(i)} &= C_{22}^{(i)}\varepsilon_2^{(i)} + C_{21}^{(i)}\varepsilon_1^{(i)} + K_{22}^{(i)}\chi_2^{(i)} + K_{21}^{(i)}\chi_1^{(i)} + C_{2T}^{(i)}, \quad (1)\\
M_1^{(i)} &= D_{11}^{(i)}\chi_1^{(i)} + D_{12}^{(i)}\chi_2^{(i)} + K_{11}^{(i)}\varepsilon_1^{(i)} + K_{12}^{(i)}\varepsilon_2^{(i)} + K_{1T}^{(i)},\\
M_2^{(i)} &= D_{22}^{(i)}\chi_2^{(i)} + D_{21}^{(i)}\chi_1^{(i)} + K_{22}^{(i)}\varepsilon_2^{(i)} + K_{21}^{(i)}\varepsilon_1^{(i)} + K_{2T}^{(i)},
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}$ – относительные деформации удлинений по направлениям координатных линий α, β; $\chi_1^{(i)}$, $\chi_2^{(i)}$ – изменение кривизн координатной поверхности при изгибе.

В (1) коэффициенты при компонентах деформаций представляют собой параметры, характеризующие жесткость двухпоясной оболочки

$$
C_{jk}^{(i)} = \sum_{s=1}^{2} B_{jk}^{(si)} A_j^{(s)}, \quad D_{jk}^{(i)} = \frac{h_o^2}{4}\sum_{s=1}^{2} B_{jk}^{(si)} A_j^{(s)},
$$

$$
K_{jk}^{(i)} = \frac{h_o}{2_o}\sum_{s=1}^{2} B_{jk}^{(si)} A_j^{(s)}(-1)^{s+1},
$$

$$
C_{jT}^{(i)} = -\sum_{s=1}^{2} A_j^{(s)}(B_{j1}^{(si)}\alpha_1^{(si)} + B_{j2}^{(si)}\alpha_2^{(si)})T, \qquad (2)
$$

$$
K_{jT}^{(i)} = -\frac{h_o}{2}\sum_{s=1}^{2} A_j^{(s)}(B_{j1}^{(si)}\alpha_1^{(si)} + B_{j2}^{(si)}\alpha_2^{(si)})T(-1)^{s+1},
$$

где h_o – расстояние между срединными поверхностями поясных сеток оболочки; $A_j^{(s)}$ – площадь поперечного сечения единицы длины s-го пояса в j-ом направлении; $\alpha_1^{(si)}$, $\alpha_2^{(si)}$ – коэффициенты линейного теплового расширения; T – изменение температуры.

Коэффициенты $B_{jk}^{(si)}$ в (2) определяются из следующих выражений

$$
B_{11}^{(si)} = \frac{E_1^{(si)}}{1-\nu_1^{(si)}\nu_2^{(si)}}, \quad B_{22}^{(si)} = \frac{E_2^{(si)}}{1-\nu_1^{(si)}\nu_2^{(si)}},
$$

$$
B_{12}^{(si)} = B_{21}^{(si)} = \frac{\nu_2^{(si)}E_1^{(si)}}{1-\nu_1^{(si)}\nu_2^{(si)}} = \frac{\nu_1^{(si)}E_2^{(si)}}{1-\nu_1^{(si)}\nu_2^{(si)}}, \qquad (3)
$$

где $E_1^{(si)}$, $E_2^{(si)}$ – модули продольных деформаций поясов оболочки по направлениям α и β; $\nu_1^{(si)}$, $\nu_2^{(si)}$ – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие слоев при растяжении в направлении координатных криволинейных осей α и β.

Перечисленные выше усилия $T_1^{(i)}$, $T_2^{(i)}$, $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, $S_{12}^{(i)}$, $S_{21}^{(i)}$, $H_{12}^{(i)}$, $H_{21}^{(i)}$ воспринимаются в сквозной оболочке в уровне срединных поверхностей поясных сеток, перераспределившись между ними пропорционально их жесткостям так, что вызывают ранее указанные деформации координатной поверхности оболочки $\varepsilon_1^{(i)}$, $\varepsilon_1^{(i)}$, $\chi_1^{(i)}$, $\chi_2^{(i)}$, $\omega^{(i)}$, $\tau^{(i)}$. Усилия $Q_1^{(i)}$ и $Q_2^{(i)}$ воспринимаются системой связей между поясными сетками.

Усилия, полученные в сплошной оболочке, используются для определения деформаций «кристалла» сетчатой оболочки $\tilde{\varepsilon}_1^{(i)}$, $\tilde{\varepsilon}_1^{(i)}$, $\tilde{\chi}_1^{(i)}$, $\tilde{\chi}_2^{(i)}$, а также $\tilde{\omega}^{(i)}$, $\tilde{\tau}^{(i)}$, применяя известные приемы перехода от континуальной среды к дискретной и наоборот [4], с учетом нелинейной связи между деформациями и напряжениями в материале стержней оболочки. Дополнительно учитывается влияние деформаций поперечного сдвига на кривизну координатной поверхности

$$
\begin{aligned}
\hat{\chi}_1^{(i)} &= \tilde{\chi}_1^{(i)} + [Q_1^{(i)}]'\gamma_1^{(i)},\\
\hat{\chi}_2^{(i)} &= \tilde{\chi}_2^{(i)} + [Q_2^{(i)}]'\gamma_2^{(i)}, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

где $\gamma_1^{(i)}$ и $\gamma_2^{(i)}$ – углы поперечного сдвига системы связей между поясными сетками соответственно от $Q_1^{(i)} = 1$ и $Q_2^{(i)} = 1$, определяемые с учетом [4].

Перечисленные выше деформации слоистой анизотропной оболочки и уравнения (1) позволяют найти величины жесткостных характеристик для расчета оболочки на следующем $(i+1)$ шаге загружения по формулам

$$
\begin{aligned}
B_{\text{экв},11}^{(1,i+1)} &= (U_3^{(i)}T_1^{(i)} - U_1 M_1^{(i)})/(U_2^{(i)}U_3^{(i)} - U_1^{(i)}U_4^{(i)}),\\
B_{\text{экв},11}^{(2,i+1)} &= (U_4^{(i)}T_1^{(i)} - U_2^{(i)}M_1^{(i)})/(U_2^{(i)}U_3^{(i)} - U_1^{(i)}U_4^{(i)}), \quad (5)\\
B_{\text{экв},22}^{(1,i+1)} &= (U_8^{(i)}T_2^{(i)} - U_5^{(i)}M_2^{(i)})/(U_6^{(i)}U_8^{(i)} - U_5^{(i)}U_7^{(i)}),\\
B_{\text{экв},22}^{(2,i+1)} &= (U_7^{(i)}T_2^{(i)} - U_6^{(i)}M_2^{(i)})/(U_6^{(i)}U_8^{(i)} - U_5^{(i)}U_7^{(i)}),
\end{aligned}
$$

где коэффициенты $U_m^{(i)}$ $(m = 1..8)$ имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
U_1^{(i)} &= A_1^{(2)}[\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(2,i)}\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} - h_o(\hat{\chi}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(2,i)}\hat{\chi}_2^{(i)})/2 + V_2^{(T)})]\\
U_2^{(i)} &= A_1^{(1)}[\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(1,i)}\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} + h_o(\hat{\chi}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(1,i)}\hat{\chi}_2^{(i)})/2 + V_1^{(T)})]\\
U_3^{(i)} &= -h_o A_1^{(2)}[\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(2,i)}\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} - h_o(\hat{\chi}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(2,i)}\hat{\chi}_2^{(i)})/2 + V_3^{(T)})]/2\\
U_4^{(i)} &= h_o A_1^{(i)}[\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(1,i)}\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} + h_o(\hat{\chi}_1^{(i)} + \tilde{\nu}_2^{(1,i)}\hat{\chi}_2^{(i)})/2 + V_1^{(T)})]/2\\
U_5^{(i)} &= A_2^{(2)}[\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(2,i)}\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} - h_o(\hat{\chi}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(2,i)}\hat{\chi}_1^{(i)})/2 + V_5^{(T)})] \quad (6)\\
U_6^{(i)} &= A_2^{(1)}[\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(1,i)}\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} + h_o(\hat{\chi}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(1,i)}\hat{\chi}_1^{(i)})/2 + V_4^{(T)})]
\end{aligned}
$$

$$U_7^{(i)} = h_o A_2^{(1)}[\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(1,i)}\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} + h_o(\hat{\chi}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(1,i)}\hat{\chi}_1^{(i)})/2 + V_4^{(T)})]/2$$
$$U_8^{(i)} = -h_o A_2^{(2)}[\tilde{\varepsilon}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(2,i)}\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} - h_o(\hat{\chi}_2^{(i)} + \tilde{\nu}_1^{(2,i)}\hat{\chi}_1^{(i)})/2 + V_6^{(T)})]/2$$

здесь

$$\begin{aligned}
V_1^{(T)} &= -T(\alpha_1^{(1)} + \nu_2^{(1)}\alpha_2^{(1)}),\\
V_2^{(T)} &= -T(\alpha_1^{(2)} + \nu_2^{(2)}\alpha_2^{(2)}),\\
V_3^{(T)} &= -T(\alpha_1^{(2)} - \nu_2^{(2)}\alpha_2^{(2)}),\\
V_4^{(T)} &= -T(\alpha_2^{(1)} + \nu_1^{(1)}\alpha_1^{(1)}),\\
V_5^{(T)} &= -T(\alpha_2^{(2)} + \nu_1^{(2)}\alpha_1^{(2)}),\\
V_6^{(T)} &= -T(\alpha_2^{(2)} - \nu_1^{(2)}\alpha_1^{(2)}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Зная зависимости (3), определяются

$$\begin{aligned}
B_{экв,12}^{(1,i+1)} &= B_{экв,11}^{(1,i+1)}\tilde{\nu}_2^{(1,i+1)},\quad B_{экв,12}^{(2,i+1)} = B_{экв,11}^{(2,i+1)}\tilde{\nu}_2^{(2,i+1)},\\
B_{экв,21}^{(1,i+1)} &= B_{экв,22}^{(1,i+1)}\tilde{\nu}_1^{(1,i+1)},\quad B_{экв,21}^{(2,i+1)} = B_{экв,22}^{(2,i+1)}\tilde{\nu}_1^{(2,i+1)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения, устанавливающие связь между внутренними усилиями и деформациями сдвига и кручения, имеют вид

$$\begin{aligned}
H^{(i)} &= H_{12}^{(i)} = H_{21}^{(i)} = D_{66}^{(i)}\tau^{(i)} + K_{66}^{(i)}\omega^{(i)},\\
S^{(i)} &= S_{12}^{(i)} = S_{21}^{(i)} = C_{66}^{(i)}\omega^{(i)} + K_{66}^{(i)}\tau^{(i)},
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega^{(i)}$ и $\tau^{(i)}$ – угол сдвига и относительная деформация кручения координатной поверхности оболочки.

В (8) жесткостные коэффициенты при компонентах деформаций определяются по формулам

$$C_{66}^{(i)} = \sum_{s=1}^{2} B_{66}^{(si)},\quad K_{66}^{(i)} = \frac{h_o}{2}\sum_{s=1}^{2} B_{66}^{(si)}(-1)^{s+1},\quad D_{66}^{(i)} = \frac{h_o}{2}\sum_{s=1}^{2} B_{66}^{(si)}, \tag{10}$$

где $B_{66}^{(si)} = G_{12}^{(si)}$ – жесткость на сдвиг в плоскости касательной к координатной поверхности.

Зная $S^{(i)}$, $H^{(i)}$, из рассмотрения картины деформации «кристалла» сетчатой оболочки с учетом нелинейной связи $\sigma = f(\varepsilon)$ для материала стержней поясов определяются деформации $\tilde{\omega}^{(i)}$ и $\tilde{\tau}^{(i)}$, а затем, используя (10), величины $G_{экв,12}^{(1,i+1)}$ и $G_{экв,12}^{(2,i+1)}$ для расчета оболочки на следующем $(i+1)$ шаге загружения

$$\begin{aligned}
G_{экв,12}^{(1,i+1)} &= -(U_{12}^{(i)}S^{(i)} + U_{13}^{(i)}H^{(i)})/U_9^{(i)},\\
G_{экв,12}^{(2,i+1)} &= -(U_{10}^{(i)}S^{(i)} + U_{11}^{(i)}H^{(i)})/U_9^{(i)},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
U_9^{(i)} &= h_o(\tilde{\tau}^2 h_o - 2\tilde{\omega}^2),\quad U_{10}^{(i)} = h_o(\tilde{\omega} + \tilde{\tau}),\\
U_{11}^{(i)} &= -(2\tilde{\omega} + \tilde{\tau}h_o),\quad U_{12}^{(i)} = h_o(\tilde{\omega} - \tilde{\tau}),\\
U_{13}^{(i)} &= 2\tilde{\omega} - \tilde{\tau}h_o.
\end{aligned} \tag{12}$$

Полученные величины эквивалентных жесткостных характеристик $B_{экв,11}^{(1,i+1)}$, $B_{экв,11}^{(2,i+1)}$, $B_{экв,22}^{(1,i+1)}$, $B_{экв,22}^{(2,i+1)}$, $B_{экв,12}^{(1,i+1)}$, $B_{экв,12}^{(2,i+1)}$, $B_{экв,21}^{(1,i+1)}$, $B_{экв,21}^{(1,i+1)}$, $G_{экв,12}^{(1,i+1)}$, $G_{экв,12}^{(2,i+1)}$ позволяют, зная [1], решать задачи прочности, жесткости и устойчивости физически и геометрически нелинейных стержневых оболочек. Аналогично выполняется расчет стержневых плит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 61–73.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 531 с.
4. Трофимов В. И., Бегун Г. Б. Структурные конструкции. М.: Стройиздат, 1972. 272 с.