Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 11, 2004

УДК 515.142.275

О НОСИТЕЛЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

Е. В. Вакулова

Статья посвящена вопросам, связанным с функтором суперрасширения. Основной результат — построение примера, показывающего, что объединение всех минимальных по включению элементов максимальной сцепленной системы может быть не замкнутым.

Исходя из общего определения носителя точки пространства $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ — ковариантный функтор, действующий из категории Comp компактов и их непрерывных отображений в ту же категорию, а X — компакт, в случае, когда рассматривается функтор суперрасширения λ, можно получить определение носителя максимальной сцепленной системы (МСС). Интересен вопрос о том, каким образом устроен носитель произвольной МСС. Известно, что носитель МСС является замыканием объединения ее минимальных по включению элементов. Является ли это объединение замкнутым? В некоторых важных частных случаях, например, когда это объединение конечно, очевидно, да. Основной результат данной работы — контрпример, показывающий, что объединение всех минимальных по включению элементов МСС может быть и не замкнутым.

Напомним основные определения, касающиеся ковариантных функторов в категории Comp и, в частности, функтора суперрасширения λ.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *мономорфным*, если для любого вложения $i\colon Y \to X$ отображение $\mathcal{F}(i)\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора $\mathcal{F}$ и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $\mathcal{F}(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(i)(\mathcal{F}(Y))$ пространства $\mathcal{F}(X)$.

Если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\operatorname{supp} a$ следующим образом:

$$\operatorname{supp} a = \cap\{Y \subset X \colon Y \text{ — замкнуто и } a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Пусть X — компакт, ξ — некоторое семейство замкнутых непустых подмножеств в X. Если любые два элемента ξ имеют непустое пересечение, то ξ — сцепленная система.

Сцепленная система ξ является *максимальной сцепленной системой (МСС)*, если ξ не содержится ни в какой другой сцепленной системе.

МСС обладает следующим свойством: если замкнутое множество $G \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $G \in \xi$.

Любая сцепленная система может быть дополнена до максимальной, но такое дополнение, как правило, неоднозначно.

Обозначим через $\lambda(X)$ множество всех МСС пространства X. Топология на $\lambda(X)$ задается с помощью базы, которую образуют множества вида

$$O(U_1, \ldots, U_k) = \{\xi \in \lambda(X) \colon \forall i \in \{1, \ldots, k\} \exists F_i (F_i \in \xi \& F_i \subset U_i)\},$$

где $U_1, \ldots, U_k$ — открытые множества в X. Открытую предбазу топологии на $\lambda(X)$ образует семейство множеств вида $O(U)$, где U — открыто в X. Множество $\lambda(X)$, снабженное такой топологией, называется суперрасширением пространства X.

Если A — замкнутое подмножество пространства X, то любая МСС ξ пространства A содержится в единственной МСС ξ_X пространства X.

Пусть $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение компактов. Тогда для $\xi \in \lambda(X)$ система $\{f(F) \colon F \in \xi\}$ является МСС пространства $f(X)$. Эта система однозначно достраивается до МСС пространства Y, которую обозначим $\lambda f(X)$. Таким образом, определено отображение $\lambda f \colon \lambda X \to \lambda Y$, которое является непрерывным.

Пусть $\xi \in \lambda(X)$, тогда согласно определению

$$\operatorname{supp} \xi = \cap\{A \subset X \colon A \text{ — замкнуто и } \xi \in \lambda(A)\}.$$

Очевидно, что носитель является замкнутым множеством (как пересечение замкнутых множеств). Условие $\xi \in \lambda(A)$ можно заменить на следующее: $A \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ для любых $F_1, F_2 \in \xi$, и тогда определение носителя МСС примет вид:

$$\operatorname{supp} \xi = \cap\{A \subset X\colon A \text{ — замкнуто, } A \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \quad \forall F_1, F_2 \in \xi\}.$$

Легко показать, что

$$\operatorname{supp} \xi \cap \ F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \quad \forall F_1, F_2 \in \xi. \tag{1}$$

Пусть ξ — МСС, $F \in \xi$. F называется *минимальным по включению элементом* ξ, если из условия $G \in \xi$ и $G \subset F$ следует, что $G = F$.

При помощи трансфинитной индукции [1] можно доказать, что для любого элемента G МСС существует минимальный по включению элемент F, содержащийся в G.

Теорема 1. *Для произвольной МСС ξ справедливо равенство*

$$\operatorname{supp} \xi = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha \text{ — минимальныйповключениюэлемент} \xi\}] \tag{2}$$

Доказательство. Покажем, что каждый минимальный по включению элемент МСС содержится в носителе. Для этого воспользуемся свойством носителя (1). Тогда для произвольного минимального по включению элемента $F_\alpha \in \xi$ справедливо

$$(\operatorname{supp} \xi \cap F_\alpha) \cap G \neq \emptyset \quad \forall G \in \xi.$$

По свойству МСС это означает, что элемент $(\operatorname{supp} \xi \cap F_\alpha) \in \xi$. Но так как $(\operatorname{supp} \xi \cap F_\alpha) \subset F_\alpha$, а F_α — минимальный по включению, то $(\operatorname{supp} \xi \cap F_\alpha) \in \xi$ лишь в случае, когда $\operatorname{supp} \xi \cap F_\alpha = F_\alpha$, т. е. когда $F_\alpha \subset \operatorname{supp} \xi$. Таким образом, любой минимальный по включению элемент содержится в носителе системы, следовательно,

$$[\cup\{F_\alpha\colon F_\alpha \text{ — минимальный по включению элемент } \xi\}] \subset \operatorname{supp} \xi.$$

Докажем теперь, что $\forall\, G_1, G_2 \in \xi$

$$[\cup\{F_\alpha\colon F_\alpha \text{ — минимальный по включению элемент } \ \xi\}] \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset.$$

Любые множества $G_1, G_2 \in \xi$ содержат в себе минимальные по включению элементы из МСС ξ: $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$, причем $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Тогда имеем, что

$$[\cup\ F_\alpha] \cap G_1 \cap G_2 \supset [\cup\ F_\alpha] \cap F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_2 \neq \emptyset.$$

Доказанное означает, что $[\cup F_\alpha]$ — одно из множеств в определении носителя МСС, пересечением которых он является. Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\mathrm{supp}\xi \subset [\cup\{F_\alpha\colon F_\alpha \text{ — минимальный по включению элемент } \xi\}].$$

Теорема доказана. □

Теперь построим такую МСС, у которой объединение всех минимальных по включению элементов не является замкнутым множеством.

Рассмотрим в качестве компакта X отрезок $[0;1]$. Все рациональные точки Q отрезка $[0;1]$ можно пронумеровать в некоторой последовательности: $r_0, r_1, r_2, \ldots$ Сформируем множества F_n следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & \{r_0, r_1\}; \\ F_2 & = & \{r_0, r_2\}; \\ F_3 & = & \{r_1, r_2, r_3\}; \\ F_4 & = & \{r_0, r_3, r_4\}; \\ \ldots & & \\ F_{2k} & = & \{r_0, r_3, r_5, r_7, \ldots, r_{2k-1}, r_{2k}\}; \\ F_{2k+1} & = & \{r_1, r_2, r_4, r_6, \ldots, r_{2k}, r_{2k+1}\}; \\ \ldots & & \end{array}$$

Как видно из построения, множества F_n образуют сцепленную систему. Эта сцепленная система может быть дополнена до некоторой МСС ξ_0.

Пусть Φ — минимальный по включению элемент ξ_0. Покажем, что

1) либо Φ совпадает с некоторым F_n;
2) либо $\Phi \supset \{r_0, r_3, r_5, r_7, r_9, \ldots\}$;
3) либо $\Phi \supset \{r_1, r_2, r_4, r_6, r_8, \ldots\}$.

Легко проверить, что элементы F_n являются минимальными по включению. Допустим Φ отлично от F_n для любого n. Так как $\Phi \cap F_1 \neq \emptyset$ и $F_1 \not\subset \Phi$, то либо $r_0 \in \Phi$, либо $r_1 \in \Phi$.

Рассмотрим первый случай, когда $r_0 \in \Phi$, $r_1 \notin \Phi$. Так как $F_2 \not\subset \Phi$, то $r_2 \notin \Phi$. $\Phi \cap F_3 \neq \emptyset$, следовательно $r_3 \in \Phi$. Так как $F_4 \not\subset \Phi$, то $r_4 \notin \Phi$. $\Phi \cap F_5 \neq \emptyset$, следовательно, $r_5 \in \Phi$. Продолжая цепочку рассуждений, получаем, что $\Phi \supset \{r_0, r_3, r_5, \ldots\}$.

Аналогично, рассматривая второй случай, когда $r_1 \in \Phi$, $r_0 \notin \Phi$, получаем, что $\Phi \supset \{r_1, r_2, r_4, \ldots\}$. Итак, для множества Φ возможны только три перечисленные альтернативы.

За счет выбора нумерации $r_0, r_1, \ldots$ создадим ситуацию, когда возможна только первая альтернатива. Например, пусть $r_0 = 0$, $r_3, r_5, r_7, \ldots$ — все рациональные числа интервала $(\frac{1}{2}; 1)$ (пронумерованные в произвольном порядке), $r_1 = 1$, $r_2, r_4, r_6, \ldots$ — все рациональные числа $(0; \frac{1}{2}]$.

Если $\Phi \supset \{r_0, r_3, r_5, \ldots\}$, то $\Phi = [\Phi] \supset [\{r_0, r_3, r_5, \ldots\}] = \{0\} \cup [\frac{1}{2}; 1]$ и, следовательно, $\Phi \supset \{0; 1\} = F_1$, то есть Φ не является минимальным по включению элементом ξ_0.

Если $\Phi \supset \{r_1, r_2, r_4, \ldots\}$, то, аналогично,$\Phi \supset [\{r_1, r_2, r_4, \ldots\}] = [0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$, следовательно, $\Phi \supset \{0; 1\} = F_1$, то есть Φ также не является минимальным по включению элементом ξ_0.

Таким образом, все минимальные по включению элементы такой МСС ξ_0 — это множества $F_n, n = 1, 2, \ldots$ Но их объединение совпадает с множеством Q всех рациональных точек отрезка $[0; 1]$, которое не является замкнутым.

Получаем, что $\operatorname{supp} \xi_0 = [\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n] = [0; 1] \neq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = Q$.

Этот пример показывает необходимость замыкания в правой части формулы (2).

Докажем, что в случае, когда X — сходящаяся последовательность, замыкание в формуле (2) можно опустить.

Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{a\}$, где $a = \lim\limits_{i \to \infty} x_i, \xi \in \lambda(X)$. Допустим, что возможна такая ситуация, когда $a \in \operatorname{supp}\xi$ и

$$a \notin \cup\{F_\alpha \colon F_\alpha \text{ — минимальный по включению элемент } \xi\}.$$

Элементы МСС ξ являются замкнутыми подмножествами X и, следовательно, точками пространства $\exp(X)$. Известно, что $\exp(X)$ является компактом в случае, когда X — компакт. Если множество всех минимальных по включению элементов бесконечно, то из него можно выделить сходящуюся последовательность $F_1, F_2, \ldots$, состоящую из различных элементов. Поскольку любая МСС, и в том числе ξ, является замкнутым подмножеством в пространстве $\exp(X)$ [2], то предел этой последовательности $F \in \xi$. Кроме того, очевидно, $a \in F$.

Покажем, что F является минимальным по включению элементом ξ, и тем самым установим невозможность описанной выше ситуации.

Допустим, что F не является минимальным по включению элементом ξ. $F \in \xi$, значит существует минимальный по включению элемент F_0, содержащийся в F, $F \neq F_0$. По нашему первоначальному предположению, $a \notin F_0$, т. е. F_0 состоит из конечного числа точек. Пусть $F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$. Так как $F_i \to F$ при $i \to \infty$, то любая окрестность $O(F)$ содержит все элементы последовательности F_i, начиная с некоторого номера i_0.

Напомним, что открытую базу топологии пространства $\exp(X)$ образуют множества

$$O(V_1, \ldots, V_n) = \{G \in \exp(X) \colon G \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \text{ и } \forall i \in \{1, \ldots, n\} G \cap V_i \neq \emptyset\},$$

где $V_i, \ldots, V_n$ — открыты в X.

Возьмем в качестве $O(F)$ множество $O(\{x_{i_1}\}, \ldots, \{x_{i_m}\}, X \setminus F_0)$ (очевидно, данное множество является открытым в пространстве $\exp(X)$ и содержит F). Тогда из условия $F_i \in O(F)$ вытекает, что $F_i \cap \{x_{i_k}\} \neq \emptyset \quad \forall k = 1, \ldots, m \ \forall i \geq i_0$, т. е. $F_0 \subset F_i \forall \quad i \geq i_0$. Но F_i — минимальные по включению элементы, следовательно, $F_0 = F_i \quad \forall i \geq i_0$. Значит $F = F_0$. Пришли к противоречию.

Résumé

This article is devoted to the functor of superextension. By definition, the superextansion of a compact space consist of all maximal linked systems of that space. It is well known that the support of a maximal linked system coincides with the closed union of all its elements that are minimal with respect to inclusion. In this work it is shown by way of a counterexample that the union itself is not necessarily closed.

Библиографический список

[1] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию* / П. С. Александров. М.: Наука, 1977.

[2] Федорчук В. В. *Общая топология. Основные конструкции* /В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. М.: Издательство МГУ, 1988.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33