Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 515.12

ГРУППА ГОМЕОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОМЕРНОГО КУБА В СЕБЯ, ТОЖДЕСТВЕННЫХ НА ГРАНИЦЕ КУБА, КАК ГИЛЬБЕРТОВО МНОГООБРАЗИЕ

Н. С. Стреколовская

Результат статьи состоит в том, что пространство гомеоморфизмов $H(M)$ конечномерного куба в себя, тождественных на границе, в компактно открытой топологии гомеоморфно гильбертову l_2-многообразию.

Хорошо известно [1, с. 152], что проблема группы гомеоморфизмов решена для одномерных, двумерных и бесконечномерных компактных многообразий. Возник следующий вопрос о топологическом строении группы гомеоморфизмов $H(M)$ конечномерных кубов: гомеоморфно ли гильбертову многообразию пространство гомеоморфизмов $H(I^n)$, где I^n обозначает n-мерный куб? Мэйсон и Люк показали, что для любого компактного 2-многообразия $H(M)$ есть ANR.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы, дающей положительный ответ на сформулированный вопрос при произвольном $n \geq 2$.

Пусть I^n — n-мерный куб, $H(I^n)$ — пространство гомеоморфизмов, тождественных на границе, в компактно открытой топологии.

Теорема. *Пространство $H(I^n)$ гомеоморфно гильбертову пространству l_2.*

Доказательство. Согласно теореме Торунчика, если $H(M)$ есть ANR, то $H(M) \times l_2$ есть l_2-многообразие. Согласно теореме Гэгана, для любого многообразия M конечной положительной размерности $H(M)$ произведение $H(M) \times l_2$ есть l_2-многообразие. Как следствие этого результата, известно ([1, с. 152]), что $H(M)$ является

l_2-многообразием тогда и только тогда, когда $H(m)$ есть ANR. Для доказательства теоремы достаточно установить, что пространство гомеоморфизмов куба I^n в себя, тождественных на границе, есть ANR.

Лемма. $H(I^n) \in ANR$.

Так как пространство $H(I^n)$ локально линейно связно, то в силу предложения 2 из работы [3] лемма вытекает из следующего утверждения:

Предложение. *Любое непрерывное отображение $g\colon S^n \to H(I^n)$, где S^n есть n-мерная сфера, ограничивающая $n+1$-мерный шар B^{n+1}, имеет такое непрерывное продолжение $g'\colon B^{n+1} \to H(I^n)$, что для всякого стандартного открытого базисного множества G в компактно открытой топологии пространства $H(I^n)$ имеет место включение $g'(B^{n+1}) \subseteq G$.*

Для доказательства леммы рассмотрим стандартную континуумзначную ретракцию $r\colon B^{n+1} \to \exp S^n$ шара B^{n+1} на сферу S^n. Для каждого $b \in B^{n+1}$ определим отображение $F_b\colon I^n \to I^n$ следующим образом: для каждой точки $i \in I^n$ положим

$$M(b,i) = \cup f(i) : f(i) \in gr(b).$$

Пусть $f(i) = \{f_m(i)\}$, $1 \le m \le n$. У гомеоморфизма $f = \{f_m\}$ существуют почти всюду положительные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, поскольку монотонная функция на отрезке имеет производную всюду, кроме счетного множества точек. Определим отображение F_b следующим образом: положим $F_b(i)$ равной нижней грани чисел

$$\inf\{h_l(i),\ h \in gr(b)\}, \quad l \le n.$$

Отображение F_b определено корректно, поскольку множество $M(b,i)$ — континуум. Взаимная однозначность отображения F_b следует из положительности частных производных гомеоморфизма f. Зададим продолжение отображения g формулой $g'(b) = F_b$. Рассмотрим базисное множество $G = \cup G(K_i, U_i)$, где K_i — компактные, U_i — открытые подмножества куба I^n,

$$G(K_i, U_i) = \{f\colon f \in H(I^n),\ f(K_i) \subseteq U_i\}.$$

Если $g(S^n) \subseteq G$, то в силу сделанного выше замечания для любого $b \in B^{n+1}$ имеем: $F_b(K_i) \subseteq U_i$. Следовательно, $g'(B^{n+1}) \subseteq G$.

Предложение, а с ним и лемма доказаны. □

Résumé

In the paper it is proved that the space of homeomorphisms of a cube I^n in itself is the Hilbert space l_2.

Литература

[1] Чепмен Т. *Лекции о Q-многообразиях.* М.: Мир, 1981.

[2] Пасынков Б. А., Александров П. С. *Введение в теорию размерности.* М.: Наука, 1973.

[3] Басманов В. Н., Савченко А. Г. *Гильбертово пространство как пространство ретракций отрезка*// Матем. заметки. Т. 42. Вып. 1. 1987. С. 94–99.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: nstrek@mainpgu.karelia.ru