Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 519

Гогин Н.Д.

ОДНО ТОЖДЕСТВО ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕСОВЫХ СПЕКТРОВ ДУАЛЬНЫХ КОДОВ

Известны тождества Мак-Вильямса, связывающие весовые спектры взаимно дуальных кодов с помощью полиномов Кравчука. В настоящей работе устанавливаются взаимно обратные соотношения для коэффициентов весовых спектров взаимно дуальных кодов, для которых связывающими элементами являются числа Фибоначчи. Получено также комбинаторное тождество, связывающее числа Фибоначчи со значениями полиномов Кравчука в целых точках.

Цель настоящей работы - вывод тождеств (20) и (21), связывающих весовые коэффициенты взаимно дуальных кодов с помощью чисел Фибоначчи.

Следуя монографии [1], мы определяем двоичный (обобщенный) код длины n как элемент групповой алгебры

$$V_n=\mathbb{Z}_2\pm\mathbb{Z}_2\pm\ldots\pm\mathbb{Z}_2 \ (n \text{ раз}),$$

т.е. как функцию $f:V_n\to\mathbb{R}$. Множество этих функций образует n-мерное евклидово пространство относительно скалярного произведения $(f,g)=\sum_{v\in V_n} f(v)g(v)$.

Для каждого обобщенного кода f его дуальный код $\hat{f}$ определяется формулой

$$\hat{f}(u)=\sum_{v\in V_n}(-1)^{|u\cdot v|}f(v),\ u\in V_n, \tag{1}$$

где $|u\cdot v|$ - вес Хемминга покоординатного произведения (пересечения) двоичных векторов u и v. Легко устанавливается, что

$$\hat{\hat{f}}=2^n f,\ \ (f,g)=2^{-n}(\hat{f},\hat{g}). \tag{2}$$

Весовым спектром кода f называется набор чисел

$$S_m(f)=\sum_{|v|=m} f(v)=(f,\varphi_m),\ m=0,1,\dots,n, \tag{3}$$

где φ_m - индикаторная функция множества векторов $v \in V_n$, имеющих вес m:

$$\varphi_m(v)=\begin{cases}1, & |v|=m,\\ 0, & |v|\neq m.\end{cases} \tag{4}$$

Спектры взаимно дуальных кодов связаны тождествами Мак-Вильямса [1]:

$$S_m(\hat{f})=\sum_{k=0}^{n} S_k(f)\ P_m^{(n)}(k), \tag{5}$$

где $P_m^{(n)}(z)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\ C_z^j C_{n-z}^{m-j}$ - многочлены Кравчука порядка n, имеющие в качестве производящей функции полином

$$\mathcal{P}(t)=(1+t)^{n-z}\ (1-t)^z=\sum_{m=0}^{n} P_m^{(n)}(z)\ t^m. \tag{6}$$

Отметим, что

$$P_m^{(n)}(|u|)=\hat{\varphi}_m(u),\ u \in V_n;\quad P_m^{(n)}(k)=(-1)^k\ P_{n-m}^{(n)}(k). \tag{7}$$

Пусть теперь $F_0, F_1, F_2, \dots$ - последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{r+1}=F_r+F_{r-1},\ r \geq 1, \tag{8}$$

имеющая производящую функцию $t/(1-t-t^2)$. Используя (8) в форме $F_{r-1}=F_{r+1}-F_r$, определим обычным образом эту последовательность и для отрицательных значений индексов, тогда

$$F_{-r}=(-1)^{r+1}F_r,\ r \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Нам потребуется следующая

Лемма. Имеет место тождество:

$$\sum_{l=0}^{k} C_k^l\ (-2)^l\ F_{q-l}=(-1)^k\ F_{q-3k},\ (q \geq 0). \tag{10}$$

Доказательство. Проведем индукцию по q. При q=0 в силу (9) оказывается необходимым доказать тождество

$$\sum_{l=0}^{k} C_k^l\ 2^l\ F_l=F_{3k}\ . \tag{11}$$

Это можно сделать так: положим для краткости $a_k=F_{3k}$; $a_0=0$, $a_1=2$. В силу известной формулы

$$F_{r+s}=F_{r-1}F_s+F_rF_{s+1},\quad r,s \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

имеем:

$$a_{k+1}=F_{3k+3}=2F_{3k-1}+3F_{3k},$$
$$a_{k-1}=F_{3k-3}=2F_{3k-1}-3F_{3k}$$

и, вычитая, находим, что

$$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1},\ k \geqslant 1, \tag{13}$$

и отсюда

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\,[(2+\sqrt{5})^k-(2-\sqrt{5})^k],\ k \geqslant 0. \tag{14}$$

С другой стороны, полагая $b_k=\sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l\, 2^l\, F_l$, имеем $b_o=a_o$, $b_1=a_1$ и, используя формулу Бине

$$F_r=\frac{(-1)^k}{\sqrt{5}}\,(\omega_2^r-\omega_1^r),\ \omega_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \omega_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ r \geqslant 0, \tag{15}$$

находим, что

$$b_k=\sum_{l=0}^{k} C_k^l\, 2^l\, \frac{1}{\sqrt{5}}\,((-\omega_2)^l-(-\omega_1)^l)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,[(1-2\omega_2)^k-(1-2\omega_1)^k]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\,[(2+\sqrt{5})^k-(2-\sqrt{5})^k]=a_k.$$

Таким образом, тождество [11] доказано.

Теперь индукция по q проводится легко, если заметить, что в силу (12) $F_{q-3k}=(-1)^k(F_{3k-1}F_q-F_{3k}F_{q-1})$.

Имеем:

$$\sum_{l=0}^{k} C_k^l\,(-2)^l\,F_{(q+1)-l}=\sum_{l=0}^{k} C_k^l\,(-2)^l\,F_{q-l}+$$
$$+\sum_{l=0}^{k} C_k^l\,(-2)^l\,F_{(q-1)-l}=(-1)^k\,(F_{3k-1}F_q-F_{3k}F_{q-1})+$$
$$+(-1)^k\,(F_{3k-1}F_{q-1}-F_{3k}F_{q-2})=(-1)^k\,(F_{3k-1}F_{q+1}-F_{3k}F_q)=F_{(q+1)-3k},$$

что и завершает доказательство леммы.

Определим теперь функцию $F:V_n \to \mathbb{N}$ по правилу

$$F(v)=F_{|v|},\ v \in V_n,$$

и найдем дуальную к ней (т.е. ее преобразование Адамара) для $u \in V_n$, $|u|=k$:

$$\hat{F}(u)=\sum_{v}(-1)^{|u-v|}F_{|v|}=\sum_{m=0}^{n}F_m\sum_{v}(-1)^{|u-v|}\varphi_m(v)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}F_m\,P_m^{(n)}(|u|)=\sum_{m=0}^{n}F_m\,(-1)^k\,P_{n-m}^{(n)}(k)=$$

$$=(-1)^k\,\mathrm{Coeff}_n\left(\frac{t(1+t)^{n-k}\,(1-t)^k}{1-t-t^2}\right),$$

где Coeff_n означает коэффициент при t^n в разложении этой рациональной функции в ряд по степеням t. Этот коэффициент оказывается равным

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{5}}\left(\omega_2^n\,\mathcal{P}(\omega_1)-\omega_1^n\,\mathcal{P}(\omega_2)\right),$$

где $\mathcal{P}(t)$ из (6), а ω_1, ω_2 из (15). Поскольку

$$\mathcal{P}(\omega_1)=(1+\omega_1)^{n-k}(1-\omega_1)^k=(-1)^{n-k}\,\omega_2^{n-k}(2+\omega_1)^k=$$

$$=(-1)^{n-k}\sum_{r=0}^{k}C_k^r\,2^{k-r}\,\omega_2^{n-k+r}$$

и аналогично для $\mathcal{P}(\omega_2)$, то

$$\hat{F}(u)=\frac{(-1)^{n+k}}{\sqrt{5}}\left((-1)^{n-k}\sum_{r=0}^{k}C_k^r\,2^{k-r}\,\omega_2^{2n-k+r}-\right.$$

$$\left.-(-1)^{n-k}\sum_{r=0}^{k}C_k^r\,2^{k-r}\,\omega_1^{2n-k+r}\right)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r\,(-2)^{k-r}\,F_{2n-(k-r)}. \tag{16}$$

Полагая $l=k-r$, имеем в силу доказанной выше леммы

$$\hat{F}(u)=\sum_{l=0}^{k}C_k^l\,(-2)^l F_{2n-l}=(-1)^k\,F_{2n-3k}=-F_{3k-2n}, \tag{17}$$

т.е. $\hat{F}(u)=-F_{3|u|-2n}=-F_{|u|-2|\bar{u}|}$.

Для произвольного кода f найдем теперь скалярное произведение (f,F), используя формулы (2):

$$(f,F)=(f,\sum_{k=0}^{n}F_k\,\psi_k)=\sum_{k=0}^{n}S_k(f)\,F_k. \tag{18}$$

С другой стороны, используя (17), имеем:

$$(f,F)=2^{-n}(\hat{f},\hat{F})=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-F_{3k-2n})\,S_k(\hat{f}). \tag{19}$$

Приравнивая правые части (18) и (19), получаем тождество для коэффициентов весовых спектров взаимно дуальных кодов

$$\sum_{k=0}^{n} S_k(f)\, F_k = -2^{-n} \sum_{k=0}^{n} S_k(\hat{f})\, F_{3k-2n} \qquad (20)$$

и, заменяя f на $\hat{f}$, с учетом (2) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} S_k(\hat{f})\, F_k = - \sum_{k=0}^{n} S_k(f)\, F_{3k-2n}. \qquad (21)$$

Тождества (20) и (21) по форме аналогичны известным тождествам для биномиальных моментов весового спектра кода, а также тождествам Плесс [1].

Отметим в заключение, что попутно нами получено комбинаторное тождество для многочлена Кравчука:

$$\sum_{m=0}^{n} F_m\, P_m^{(n)}(k) = -F_{3k-2n},\ k=0,\dots,n, \qquad (22)$$

которое тоже, по-видимому, является новым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Вильямс Ф.Д., Слоэн Н.Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.