Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.9

Заика Ю.В.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ИДЕАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача наблюдения фазового вектора нелинейной возмущаемой динамической системы. На основе принципа двойственности задач наблюдения и управления строится множество идеально наблюдаемых функций, представимых интегральными операторами от выходов измерителей.

§1. Введение

Пусть движение объекта описывается в области $W=(t_0,t_1)\times U\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \xi_i(t)\, f_i(x), \tag{1}$$

где $f,f_i\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $\xi(t) = (\xi_1(t),\dots,\xi_r(t))'$ - вектор возмущений (или программных управлений), $|\xi_i(t)| \leqslant l=$ const. Предполагается, что допустимые $\xi_i(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными, $[0,T] \subset (t_0,t_1)$ и при $\xi(\cdot) = 0$ в (1) решения $x(\cdot;x,t)$, $x\in U$, $t\in[0,T]$, продолжимы на $[0,T]$. Нули линейных пространств обозначаем одним символом.

Начальные данные и возмущения неизвестны, а доступная информация о движении задается значениями (измерениями) вектор-функции

$$y(t)= g(x(t)),\ g \in C^1(U,\mathbb{R}^m). \tag{2}$$

Требуется определить такие (идеально наблюдаемые по аналогии с [1]) функции $\varphi : U \to \mathbb{R}^1$, значения которых $\varphi(x(T))$ независимо от реализации допустимой $\xi(\cdot)$ однозначно вычисляются по соответствующим

$$y(\cdot;x(T),T,\xi) = g(x(\cdot;x(T),T,\xi)):[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

с помощью интегрального оператора :

$$\varphi(x(T)) = \int_0^T k(\tau,y(\tau))d\tau. \qquad (3)$$

Здесь $x(\tau)$- любое решение возмущенной системы (1) такое, что $x(\tau) \in U$, $\tau\in[0,T]$, и $y(\tau)=g(x(\tau))$. Использование интегрального оператора (а не, например, производных $y^{(i)}(t_j)$) влечет определенную помехоустойчивость обработки измерений. Идеальность оператора означает независимость функции $k(\cdot,\cdot)$ от конкретной реализации $\xi(\cdot)$. Учет возмущений проводится лишь посредством измерений $y(\cdot)$. Если t_1 достаточно велико и $x(t)\in U$, $t\in[0,t_1)$, то независимо от $\xi(\cdot)$ можно последовательно вычислять $\varphi(x(jT))$ по $y:[(j-1)T,jT] \to \mathbb{R}^m$ с целью контроля и управления движением с обратной связью.

Воспользуемся двойственностью задач наблюдения и управления, подробно изученной в линейном случае [2]. Определим [3,4] сопряженную систему управления для нелинейной пары (1),(2):

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\cdot f(x)=k(t,g(x)),\ v(0,x)=0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\cdot F(x)=0,\ \ F=(f_1,\dots,f_r),\ t\in[0,T],x\in U. \qquad (5)$$

Допустимыми считаем непрерывно дифференцируемые $k(t,y)$ в соответствующих областях $\{(t,y)\} \supset [0,T]\times g(U)$, за исключением разве лишь конечного числа сечений $t=t_j$. В силу продолжимости невозмущенных решений на $[0,T]$ для фиксированной $k(\cdot,\cdot)$ функция $v(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющая уравнению (4) в $[0,T]\times U$ $(t\neq t_j)$, существует и единственна.В операторной записи получаем систему управления в $C^1(U,\mathbb{R}^1)$ с фазовыми ограничениями:

$$\frac{d}{dt}V(t)= - AV(t)+BK(t),\ V(0)=0, \qquad (6)$$

$$CV(t)=0,\ t\in[0,T], \qquad (7)$$

$$V(t)=v(t,\cdot):U \longrightarrow \mathbb{R}^1,\ AV(t)=\frac{\partial v}{\partial x}(t,\cdot)f(\cdot),$$

$$CV(t)=\frac{\partial v}{\partial x}(t,\cdot)F(\cdot).\ BK(t)=k(t,g(\cdot)) .$$

Цель настоящей статьи - описать идеально наблюдаемые функции $\varphi(\cdot)$ с помощью множества достижимости сопряженной системы (4),(5), что позволяет на этапе построения весовой функции $k(\cdot,\cdot)$ в (3) использовать разработанные методы математической теории управления.

§2. Идеальное наблюдение проекций в билинейной системе

Рассмотрим вначале более подробно частный случай:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^{r} \xi_i(t)\, B_i x + \xi_0 B_0, \quad y=Gx, \tag{8}$$

где A, B_i - постоянные матрицы размерности $n\times n$, G-$m\times n$, $\mathrm{rang}\ G = m$, $B_0 \in \mathbb{R}^n$. Требуется найти все векторы $h \in \mathbb{R}^n$, для которых проекции $h'x(T)$ однозначно восстанавливаются по $y:[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ в виде линейных интегральных операций:

$$h'x(T) = (k,y) = \int_0^T k'(\tau)y(\tau)d\tau \quad \forall\, x(T)\in\mathbb{R}^n, \quad \forall\, \xi(\cdot).$$

В этом случае нет необходимости перестраивать операции восстановления проекций $h'x(T)$ в зависимости от конкретных возмущений $\xi(\cdot)$ $(k=k(t),\ k\neq k(\xi))$. Функция ξ_0 определяет возмущение неоднородной части, а $(\xi_1,\dots,\xi_r)$ - матрицы A линейной системы.

Для билинейной системы (8) уравнения (4),(5) примут вид

$$\frac{d}{dt} V(t) = - A'V(t) + G'k(t), \quad V(0)=0, \tag{9}$$

$$B'V(t) = 0, \quad t\in[0,T], \tag{10}$$

поскольку функция $v(t,x) = \int_0^t k'(\tau)y(\tau;x,t)\Big|_{\xi=0} d\tau = V'(t)x$ линейна по $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь B составлена из базисных столбцов матрицы $(B_0,B_1,\dots,B_r)$. Считаем $\mathrm{rang}\ B = \gamma < n$.

Обозначим через K матрицу управляемости системы (9) $(G', A'G', \dots, A'^{\,q-1}G')$, q – степень минимального аннулирующего полинома A, через $\mathcal{L}(K)$ - линейную оболочку столбцов K, через H - множество тех $h \in\mathbb{R}^n$, для которых возможно представление $h'x(T)=(k,y)$ $\forall\, x(T)\in\mathbb{R}^n$, $\forall\, \xi(\cdot)$.

Теорема 1. Множество достижимости $D_T = \{V(T)\}$ сопряженной системы управления (9),(10) совпадает с искомым H.

Доказательство. Выберем в (9) допустимое кусочно-непрерывное управление k, удовлетворяющее (10). Для $v(t,x)=V'(t)x$ в силу (8) имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\frac{dx}{dt}=k'(t)Gx.$$

Подставляя $x=x(t;x(T),T,\xi)$ $\forall\ \xi(\cdot)$ и интегрируя на $[0,T]$, получим $V'(T)x(T)=(k,y)$ $\forall\ x(T)\in\mathbb{R}^n$, $\forall\ \xi(\cdot)$, откуда $D_T\subseteq H$.

Обратно, пусть для некоторых h,k выполнено $h'x(T)\equiv(k,y)$. Подставим k в (9) и положим $v(t,x)=V'(t)x$. Домножая (9) скалярно на $x(t;x(T),T)\big|_{\xi=0}$ и интегрируя на $[0,T]$, получим $v(T,x(T))=V'(T)x(T)=(k,y)$ $\forall\ x(T)\in\mathbb{R}^n,\xi=0$. Следовательно $V(T)=h$. Чтобы $h\in D_T$, осталось доказать (10). Предположим противное: для некоторых $j,\bar{t}$ $B_j'V(\bar{t})\neq0$. Положим $\xi_j=1$ на $(\bar{t}-\varepsilon,\bar{t}+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, $\xi_j=0$ вне этой окрестности $\bar{t}$ и $\xi_i=0$, $i\neq j$. Введем $\bar{v}(t,x)=\bar{V}'(t)x$, где

$$\frac{d}{dt}\bar{V}(t)=-(A'+\xi_j(t)B_j')\bar{V}(t)+G'k(t),\ \bar{V}(0)=0.$$

Тогда $\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial t}(t,x)+\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial x}(t,x)(Ax+\xi_j(t)B_jx)=k'(t)Gx,\ \bar{v}(0,x)=0.$

При достаточно малом $\varepsilon>0$ $\bar{V}(\bar{t}+\varepsilon)\neq V(\bar{t}+\varepsilon)$, а на $[\bar{t}+\varepsilon,T]$ уравнения для $V,\bar{V}$ совпадают. Вследствие единственности решений $\bar{V}(T)\neq V(T)=h$. При фиксированном на $[0,T]$ возмущении $\xi=\bar{\xi}$ имеем $\bar{v}(T,x(T))=\bar{V}'(T)x(T)=(k,y)$ $\forall x(T)\in\mathbb{R}^n$, что противоречит $\bar{V}(T)\neq h$. Поэтому исходное предположение неверно и ограничение (10) выполнено на $[0,T]$. Теорема доказана.

Определение $D_T(H)$ значительно упрощается в случае $m=1$. Действительно, пусть $y=Gx$, $G'\in\mathbb{R}^n$ и $B'K=(B'G',\dots,B'A'^{q-1}G')=0$. Последнее означает, что rang $K<n$ и столбцы матриц B_j ортогональны столбцам K, линейная оболочка $\mathcal{L}(K)$ которых образует множество достижимости линейной системы (9) для любого $t>0$ без учета (10). Поэтому при любом допустимом k выполнено (10) и $H=D_T=\mathcal{L}(K)$. Покажем теперь, что при $B'K\neq0$ любое кусочно-непрерывное на $[0,T]$ управление $k\neq0$ приводит к нарушению (10), поскольку фазовая кривая системы (9) является "пространственной" в $\mathcal{L}(K)$. Пусть $k\neq0$, $B'V\equiv0$ и $B'A'^pG'$ – первый ненулевой столбец в $B'K$. Дифференцируя (без учета точек разрыва k) тож-

Продолжая этот поцесс, придем к $B'A'^{p}G'k \equiv B'A'^{p+1}V$, $B'A'^{p}G' \neq 0$, откуда можно выразить k через $V: k=L'V, L\in\mathbb{R}^{n}$. Но при связи $k(t)=L'V(t)$ линейная система (9) имеет лишь тривиальное решение V=0 и k=0. Полученное противоречие означает, что $B'K\neq 0$ влечет $H=\{0\}$. Таким образом, при m=1 фазовое ограничение (10) либо является несущественным ($B'V=0$ $\forall k$, $D_T= \mathcal{L}(K)$), либо допускает только тривиальное решение V=0 и $H=D_T=\{0\}$. Аналогичный вывод справедлив и при наличии ограничений $|k(t)|\leqslant$const (изменится лишь $D_T=H \subset \mathcal{L}(K)$), использовании $k\in L_1(0,T)$, понимая равенство по t в смысле почти всюду на [0,T].

Перейдем к рассмотрению общего случая ($y(t)\in\mathbb{R}^{m}$). Если ограничиться в сопряженной системе управлениями $k=c\bar{k}$, $c\in\mathbb{R}^{m}$, $\bar{k}(t)\in\mathbb{R}^{1}$, то можно воспользоваться приведенными выше рассуждениями. При $B'(G'c,A'G'c,\dots,A'^{q-1}G'c)\neq 0$ множество достижимости системы (9),(10) ($k=c\bar{k}$) не содержит ненулевых векторов. Из тех вектор-столбцов c, для которых указанная матрица нулевая, составим матрицу $S: S'G(B,AB,\dots,A^{q-1}B)=0$. Тогда линейная оболочка столбцов $\mathcal{L}((G'S,A'G'S\dots,A'^{q-1}G'S))$ является подмножеством искомого $H=\{h\,|\,h'x(T)=(k,y)\ \forall\xi,\ x(T)\in\mathbb{R}^{n}\}$.

Если найдется $\gamma\times\gamma$-матрица N из условия AB=BN, то (9), (10) выполняются только при условии $B'G'k=0$, в чем нетрудно убедиться, домножив (9) на B'. В этом случае $H=\mathcal{L}((G'P,A'G'P,\dots,A'^{q-1}G'P))$, где столбцы P ортогональны столбцам GB. Если $G(B,AB,\dots,A^{q-1}B)=0$, т.е. столбцы B ортогональны базисным векторам множества достижимости (9), то $H = \mathcal{L}(K)$.

Теорема 2. Пусть p – первый номер , для которого $GA^{p}B\neq 0$. Множество H не содержит ненулевых векторов тогда и только тогда, когда rang $GA^{p}B=m$. Если rang $GA^{p}B<m$, то H содержит ненулевые векторы и совпадает с множеством достижимости некоторой линейной системы управления без фазовых ограничений.

Доказательство. Пусть rang $GA^{p}B=m$. Из $B'V=0$ следует $B'\dot{V} = -B'A'V + B'G'k=0$, $B'A'V=0,\dots,B'A'^{p}G'k=B'A'^{p+1}V$. Поэтому k можно выразить через $V: k=LV$, L – матрица $m\times n$. Подставляя k в (9), получим V=0, k=0 и $H=\{0\}$. Покажем обратное: $H=\{0\}$ влечет rang $GA^{p}B=m$. Действительно, $H=\{0\}$ означает, что для любого допустимого k при условии $B'V=0$ на [0,T] имеем $V(T)=0$. Но тогда для указанных k решение V тождественно обращается в ноль. Предположим противное: существует k_1, для которого $B'V_1=0$, $V_1(T)=0$, $V_1(\tilde{t})\neq 0$, $\tilde{t}\in(0,T)$. Сконструируем новое управление: $k_2(t) = 0$, $t\in[0,T-\tilde{t})$, $k_2(t)=k_1(t+\tilde{t}-T)$, $t\in[T-\tilde{t},T]$. В силу стационарности сопряженной системы $B'V_2=0$ на $[0,T]$, но $V_2(T)=V_1(\tilde{t}) \neq 0$. Полученное противоречие означает $V=0$. Из (9) и условия rang $G = m$ заключаем, что при $H=\{0\}$ только нулевое управление k удовлетворяет (9),(10). С другой стороны, имеем $B'A'^{p}G'k = B'A'^{p+1}V$. Покажем, что это условие не только необходимо,но и достаточно для выполнения $B'V=0$ на $[0,T]$. Пусть в (9) управление k выбрано удовлетворяющим указанному тождеству. Домножая обе части сопряженного уравнения на B', с учетом $B'G'=0$ получим $B'\dot{V}=-B'A'V$. Справа дифференцируемая вектор-функция, поэтому

$$\frac{d}{dt}(B'\dot{V})=B'A'^{2}V-B'A'G'k=B'A'^{2}V,\ldots,$$

$$\frac{d^p}{dt^p}(B'\dot{V})=(-1)^{p+1}B'A'^{p+1}V+(-1)^{p}B A'^{p}G'k=0 .$$

Учитывая начальные данные $V(0)=0$, $\left.\frac{d^i}{dt^i}B'\dot{V})\right|_{t=0}=0$, $i=\overline{0,p-1}$, получаем $B'\dot{V}=0$ и $B'V=0$. Итак, при исходном предположении $H=\{0\}$ показано, что необходимому и достаточному условию выполнения фазового ограничения (10) $(B'A'^{p}G'k=B'A'^{p+1}V)$ удовлетворяет единственное управление k (k=0). Следовательно, rang $GA^{p}B=m$.

Перейдем к доказательству следующего утверждения в формулировке теоремы. Из тождества $B'A'^{p}G'k=B'A'^{p+1}V$, равносильного фазовому ограничению $B'V=0$, при rang $GA^{p}B=\nu<m$ можно выразить ν компонент k через V и оставшиеся $m-\nu$ компонент k. При подстановке в (9) получим эквивалентную (9),(10) (с тем же множеством решений V) линейную систему $\dot{V} = -\hat{A}V+\hat{G}\hat{k}$, $V(0)=0$, $\hat{k}(t)\in\mathbb{R}^{m-\nu}$. Множество достижимости $\mathcal{L}((\hat{G},\hat{A}\hat{G},\ldots,\hat{A}^{n-1}\hat{G}))$ содержит ненулевые векторы (иначе rang $GA^{p}B=m$) и совпадает с искомым множеством H. Теорема доказана.

Замечание 1. Для rang $GA^{p}B<m$ достаточно rang $A^{p}<m$ или rang $B<m$. Если при rang $GA^{p}B<m$ для некоторого ненулевого $h\in H$ построено $\hat{k}(t)$ на $[0,T]$ из условия $V(T)=h$, то, подставляя в выражение k через $\hat{k},V$ значения $\hat{k}(t),V(t)$, получим $k(t)$ на $[0,T]$,

для которого и будет выполняться $h'x(T)=(\hat{k},y)$ $\forall\xi, x(T)\in\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Прежде чем строить управление $\hat{k}(t)$ целесообразно позаботиться о том, чтобы оно имело минимальную размерность (ранг $\hat{G}$ может оказаться меньше $m-\nu$). Чтобы получить систему без фазовых ограничений, множество достижимости которой совпадает с искомым множеством H, можно поступить следующим образом. Составим матрицу N из всех линейно независимых вектор-столбцов l, ортогональных столбцам $B'A'^pG'$. Пусть $N\neq 0$. Тогда $l'B'A'^pG'k=l'B'A'^{p+1}V=0$, $l'B'A'^{p+2}V = l'B'A'^{p+1}G'k$, и при $l'B'A'^{p+1}G'\neq 0$ к системе $B'A'^pG'k=B'A'^{p+1}V$ можно добавить новое уравнение. Если $l'B'A'^{p+1}G'=0$, то $l'B'A'^{p+2}V=0$ и $l'B'A'^{p+3}V=l'B'A'^{p+2}G'k=0$ и т.д. Либо сразу можно добавлять к $B'A'^pG'k=B'A'^{p+1}V$ новые уравнения и домножать скалярно на векторы, ортогональные столбцам матрицы при k. Увеличивая таким образом число уравнений, связывающих k и V, уменьшаем размерность $\hat{k}$.

Замечание 3. В задаче прогнозирования измерения проводятся на отрезке времени $[0,s]$, $s<T$. Поэтому в искомые представления $h'x(T)=(k,y)$ $\forall\xi$, $x(T)\in\mathbb{R}^n$, следует ввести дополнительные ограничения $k(t)=0, t\in(s,T]$. С учетом этого справедливы следующие утверждения. Если $G(B,AB,\ldots,A^{q-1}B)=0$, то $H=\mathcal{L}((G',A'G',\ldots,A'^{q-1}G'))$. Пусть p - первый номер, для которого $GA^pB\neq 0$ и rang $GA^pB=m$. Тогда $H=\{0\}$. Если rang $GA^pB<m$, то H состоит из векторов h, для которых $h'(B,AB,\ldots,A^{q-1}B)=0$ и $\exp\{A'(T-s)\}h\in H_s$, где H_s- множество достижимости (9) на $[0,s]$ при $B'V=0$, определяемое теоремой 2. В частности, $H=\{0\}$ при rang$(B,\ldots,A^{q-1}B)=n$. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2. Следует учесть только, что в силу $k(t)=0, t\in(s,T]$, необходимо $B'V(T)=B'h=0$, $B'\dot{V}(T)=-B'A'h=0,\ldots$, т.е. $h'(B,AB,\ldots,A^{q-1}B)=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда измерения тоже подвержены возмущениям:

$$y=Gx+\sum_{i=1}^{d}\zeta_i(t)G_ix+\zeta_0(t)G_0, \qquad (11)$$

где G_i- матрицы размерности $m\times n$, $G_0\in\mathbb{R}^m$, ζ_j- скалярные функции времени на $[0,T]$, $|\zeta_j(t)|\leq 1=\mathrm{const}$. Составим в $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)(Ax+\sum_{i=1}^{r}\xi_i(t)B_ix+\xi_0(t)B_0)=$$
$$=k'(t)(Gx+\sum_{i=1}^{d}\zeta_i(t)G_ix+\zeta_0(t)G_0). \qquad (12)$$

Определим для v,k ограничения:
$v(t,x)=V'(t)x$, $B_i'V(t)=0$, $i=\overline{0,r}$, $k'(t)G_i=0$, $i=\overline{0,d}$, $t\in[0,T]$.
Тогда получаем следующую линейную сопряженную систему управления с линейными ограничениями:

$$\dot V(t)=-A'V(t)+G'k(t),\ V(0)=0, \qquad (13)$$
$$B'V(t)=0,\ C'k(t)=0,\ t\in[0,T], \qquad (14)$$
$$B=(B_0,B_1,\dots,B_r),\quad C=(G_0,G_1,\dots G_d).$$

Пусть $h=V(T)$ принадлежит множеству достижимости (13),(14).
Для соответствующего k уравнение (12) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\,Ax=k'(t)Gx,\ v(0,x)=0. \qquad (15)$$

Поскольку (15) справедливо для $x\in\mathbb{R}^n$, то оно справедливо и на произвольной траектории $x(t)=x(t;x(T),T,\xi,\zeta)$. Интегрируя обе части уравнения на $[0,T]$ с учетом

$$Gx(t)=y(t)-\sum_{i=1}^{d}\zeta_i(t)G_ix(t)-\zeta_0(t)G_0,\ \text{получим}$$

$$h'x(T)=\int_0^T k'(\tau)y(\tau)d\tau=(k,y),\ x(T)\in\mathbb{R}^n. \qquad (16)$$

Таким образом, по формуле (16) имеем возможность по измерениям $y:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^m$ восстанавливать проекцию $h'x(T)$ независимо от реализации возмущений $\xi=(\xi_0,\dots,\xi_r)$, $\zeta=(\zeta_0,\dots,\zeta_d)$.

Из соотношения $C'k=0$ следует выразить часть компонент k через остальные, подставить в (13) и затем уже воспользоваться теоремой 2.

Если $r=d$, $\zeta_i=\xi_i$, то, приравнивая в (12) к нулю коэффициенты при ξ_i, получим для (13) ограничения $G_i'k=B_i'V$, $i=\overline{0,r}$, т.е. $k'C=V'B$. Следует выразить часть компонент k через остальные и вектор V, подставить в (13) и найти множество достижимости $D_T=H$ полученной системы управления без ограничений как линейную оболочку столбцов матрицы управляемости. В итоге необходимо выразить k через t (см.замечание 1).

Если имеется возможность на $[0,T]$ измерять $y=Gx$ и возмущения $\xi_i, i=\overline{1,r}$, то множество H тех векторов h, для которых справедливо представление $h'x(T)=(k,y)$ $\forall\xi$, $x(T)\in\mathbb{R}^n$, можно расширить. Действительно, представим k в виде $k=\bar{k}+\bar{\bar{k}}$. На $v(t,x)=V'(t)x$ наложим ограничения

$$\dot{V}(t)=-A'V(t)+G'\bar{k}(t),\ V(0)=0,\ B_0'V(t)=0, \tag{17}$$

$$G'\bar{\bar{k}}(t)-\sum_{i=1}^{r}B_i'V(t)\xi_i(t)=0,\ t\in[0,T]\ . \tag{18}$$

Если наряду с (17) имеют место включения $B_i'V(t)\in\mathcal{L}(G')$, $i=\overline{1,r}$, то выполнения (18) можно добиться выбором $\bar{\bar{k}}$ для любых $\xi_i, i=\overline{1,r}$. В противном случае представим $B_i=\bar{B}_i+\bar{\bar{B}}_i$, где столбцы $\bar{B}_i'$ принадлежат $\mathcal{L}(G')$, а $\bar{\bar{B}}_i'$ – нет. Если к (17) добавить условия $\bar{\bar{B}}_i'V(t)=0$, то (18) удовлетворяется выбором $\bar{\bar{k}}$.Построим, используя теорему 2, $\bar{k}$ в (17) из условия $V(T)=h$ при ограничениях $B_0'V=0$, $\bar{\bar{B}}_i'V=0$, $i=\overline{1,r}$. Сложим уравнения (17), (18), домножим результат скалярно на $x(t;x(T),T,\xi)$ и проинтегрируем обе части уравнения на $[0,T]$. Получим $h'x(T)=(k,y)$, где $k=\bar{k}+\bar{\bar{k}}$, $\bar{k}$ определяется предварительно, а $\bar{\bar{k}}$ формируется по мере измерения ξ_i согласно (18), например, по формуле

$$\bar{\bar{k}}(t)=M^{-1}G\Big(\sum_{i=1}^{r}B_i'\xi_i(t)\Big)V(t),M=GG'.$$

§3. Исследование общего нелинейного случая

Рассмотрим теперь систему наблюдения (1),(2) и соответствующую сопряженную систему управления (4),(5).

Теорема 3. Множество достижимости $D_T=\{v(T,\cdot):U\to\mathbb{R}^1\}$ сопряженной системы управления (4),(5) совпадает с множеством Ф функций $\varphi:U\to\mathbb{R}^1$, определяемых интегральными операторами идеального наблюдения (3).

Доказательство. Фиксируем допустимое k и соответствующую $v(T,\cdot)\in D_T$. Тогда в силу (5) функция $v(t,x)$ независимо от ξ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)(f(x)+F(x)\xi(t))=k(t,g(x)), \qquad (19)$$

$$v(0,x)=0,\ x\in U,\ t\in[0,T].$$

Рассмотрим на отрезке времени $[0,T]$ произвольное решение $x(t)\in U$ возмущенной системы (1). Подставляя $x(t)$ в (19) и интегрируя обе части по $t\in[0,T]$, получим (3) для $\varphi=v(T,\cdot)$, т.е. $v(T,\cdot)\in\Phi$, $D_T \subseteq \Phi$.

Обратно, пусть для некоторых k,φ выполнено (3). Подставим k в (4). Полагая $x=x(t;x(T),T)$, $\xi=0$, $x(T)\in U$, и интегрируя на $[0,T]$, получим с учетом определения φ по k $\varphi(x(T))=v(T,x(T))$, т.е. $\varphi=v(T,\cdot)$ в U. Чтобы $\varphi\in D_T$, осталось доказать выполнение (5).

Предположим противное: для некоторых $j,\bar t,\bar x$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar t,\bar x)f_j(\bar x)\neq 0,\quad (\bar t,\bar x)\in[0,T]\times U.$$

Положим $\xi_j=\varepsilon$ на $(\bar t-\varepsilon,\bar t+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, $\xi_j=0$ вне ε-окрестности $\bar t$ и $\xi_i=0$, $i\neq j$. Обозначим через $\bar v$ решение (19) при $\xi=\bar\xi$. Для достаточно малого ε решения $x(\cdot;x,t,\bar\xi)$, $\|x-\bar x\|<\varepsilon$, $|t-\bar t|<\varepsilon$, продолжимы на $[0,T]$ и, следовательно, $\bar v$ определена в некоторой окрестности $S\subseteq[0,T]\times U$ решения $(t,x(t;\bar x,\bar t,\bar\xi))$, $t\in[0,T]$. Функция $\bar v$ непрерывна в S и непрерывно дифференцируема за исключением разве лишь конечного числа сечений (в том числе и $t=\bar t\pm\varepsilon$). Вычитая из (19) (при $\xi=\bar\xi$) (4), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar v-v)+\frac{\partial}{\partial x}(\bar v-v)(f+F\bar\xi)=-\frac{\partial}{\partial x}F\bar\xi,$$

$$\bar v(0,x)=0,\ v(0,x)=0,\ (t,x)\in S.$$

Подставим $x=x(t)=x(t;\bar x,\bar t,\bar\xi)$ и проинтегрируем по t. На указанном решении из $\bar v(t,x(t))-v(t,x(t))=0$, $t\in[0,\bar t-\varepsilon]$,

$$\frac{d}{dt}(\bar v(t,x(t))-v(t,x(t)))=0,\quad t\in(\bar t+\varepsilon,T),$$

$$\frac{d}{dt}(\bar v(t,x(t))-v(t,x(t)))\neq 0,\quad t\in(\bar t-\varepsilon,\bar t+\varepsilon),\ \varepsilon\ll 1,$$

следует $\bar v(T,x(T))-v(T,x(T))\neq 0$, $\bar v(T,x(T))\neq v(T,x(T))=\varphi(x(T))$. Поскольку значение $\bar v(T,x(T))$ равно интегралу в (3) и $x(t)\in U$, $t\in[0,T]$, то (3) не выполняется в точке $x(T;\bar x,\bar t)$, $(\xi=\bar\xi)$. Полученное противоречие влечет справедливость (5). Теорема доказана.

Перейдем теперь к изложению техники степенных рядов для построения $k(\cdot,\cdot)$ в (3). В предположениях вещественной аналитичности f, f_1, g в области $\{x \mid \|x\| = \max_i |x_i| < a\}$, $f(0)=f_1(0)=0$, $g(0)=0$ существует окрестность нуля, в которой $f, f_1, g, v(t,\cdot)$ представимы степенными рядами, для $v(t,\cdot)$ – с непрерывно дифференцируемыми по t коэффициентами, сходящимися равномерно на $[0,T]$ при фиксированном x. Допустимыми считаем определенные в $[0,T]\times\{y \mid \|y\|<b\}$ и аналитические по y функции $k(t,y)$ $(k(t,0)=0)$, сохраняющие непрерывность по совокупности аргументов и при комплексных y.

Приравняем в уравнениях (4),(5) слева и справа однородные полиномы одинаковой степени (верхний индекс):

$$\frac{\partial v^{(p)}}{\partial t}(t,x)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial v^{(p)}}{\partial x}(t,x)f^{(p-i+1)}(x)=k^{(1)}(t,g^{(p)}(x))+\ldots+$$

$$+k^{(p)}(t,g^{(1)}(x)),\qquad \sum_{i=i}^{p}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial x}(t,x)f_j^{(p-i+1)}(x)=0,$$

$$v^{(i)}(0,x)=0,\ p\geq 1,\ j=\overline{1,r}.$$

Каждому однородному полиному $w^{(p)}(\cdot)$ соответствует единственная симметрическая p-линейная форма $\tilde{w}^{(p)}(\cdot,\ldots,\cdot)$ из условия $\tilde{w}^{(p)}(x,\ldots,x)\equiv w^{(p)}(x)$, $\tilde{w}^{(1)}(\cdot)=w^{(1)}(\cdot)$ [5]. В терминах симметрических полилинейных форм имеем:

$$\frac{\partial \tilde{v}^{(p)}}{\partial t}(t,x,\ldots,x)+\sum_{i=1}^{p}\sum_{q=1}^{i}\dot{v}^{(i)}(t,x,\ldots,\tilde{f}^{(p-i+1)}(x,\ldots,x),\ldots,x)=$$

$$=k^{(1)}(t,\dot{\tilde{g}}^{(p)}(x,\ldots,x))+\ldots+\sum_{i_1+\ldots+i_{p-1}=p}\tilde{k}^{(p-1)}(t,\tilde{g}^{(i_1)}(x,\ldots,x),\ldots$$

$$\ldots,\tilde{g}^{(i_{p-1})}(x,\ldots,x))+\tilde{k}^{(p)}(t,g^{(1)}(x),\ldots,g^{(1)}(x)),$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{q=1}^{i}\tilde{v}^{(i)}(t,x,\ldots,\tilde{f}_j^{(p-i+1)}(x,\ldots,x),\ldots,x)=0.$$

Индекс q указывает порядковый номер аргументов $\tilde{f}^{(\dots)}, \tilde{f}_j^{(\dots)}$, t считаем параметром. Используя операцию прямого произведения матриц $\otimes$ [6], приравняем коэффициенты при одинаковых мономах $x_{i_1}\dots x_{i_p}$:

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}^{(p)}(t)+\sum_{q=1}^{p} E\otimes\dots\otimes F^{(1)'}\otimes\dots\otimes E\tilde{V}^{(p)}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{q=1}^{i} E\otimes\dots\otimes\tilde{F}^{(p-i+1)'}\otimes\dots\otimes E\tilde{V}^{(i)}(t)=$$

$$=\tilde{G}^{(p)'}K^{(1)}(t)+(\tilde{G}^{(2)'}\otimes G^{(1)'}+G^{(1)'}\otimes\tilde{G}^{(2)'})\tilde{K}^{(2)}(t)+\dots+$$

$$+\sum_{i_1+\dots+i_{p-1}=p}\tilde{G}^{(i_1)'}\otimes\dots\otimes\tilde{G}^{(i_{p-1})'}\tilde{K}^{(p-1)}(t)+G^{(1)'}\otimes\dots\otimes G^{(1)'}\tilde{K}^{(p)}(t),$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{q=1}^{i} E\otimes\dots\otimes\tilde{F}_j^{(p-i+1)'}\otimes\dots\otimes E\tilde{V}^{(i)}(t)=0,\ \tilde{V}^{(p)}(0)=0,\ p\geqslant 1,\ j=\overline{1,r},$$

$$\tilde{F}^{(p)}X^{(p)}=\tilde{f}^{(p)}(x,\dots,x)=f^{(p)}(x),\ X^{(p)}=x\otimes\dots\otimes x\ (p\ \text{раз}),$$

$$\tilde{F}_j^{(p)}X^{(p)}=\tilde{f}_j^{(p)}(x,\dots,x)=f_j^{(p)}(x),\tilde{G}^{(p)}X^{(p)}=\tilde{g}^{(p)}(x,\dots,x)=g^{(p)}(x),$$

$$\tilde{V}^{(p)'}(t)X^{(p)}=\tilde{v}^{(p)}(t,x,\dots,x)=v^{(p)}(t,x),$$

$$\tilde{K}^{(p)'}Y^{(p)}=\tilde{k}^{(p)}(t,y,\dots,y)=k^{(p)}(t,y).$$

В матричной записи получим:

$$\frac{d}{dt}V(t)=-\mathbb{F}'V(t)+\mathbb{G}'K(t),\quad V(0)=0, \tag{20}$$

$$\mathbb{F}_j'V(t)=0,\ j=\overline{1,r}\ . \tag{21}$$

Здесь первые n строк $\mathbb{F}$ равны $(F^{(1)},\tilde{F}^{(2)},\tilde{F}^{(3)},\dots)$, следующие n^2 строк – $(0,F^{(1)}\otimes E+E\otimes F^{(1)},\ \tilde{F}^{(2)}\otimes E+E\otimes\tilde{F}^{(2)},\dots),\dots$, аналогично в $\mathbb{F}_j$, первые m строк $\mathbb{G}$ равны $(G^{(1)},\tilde{G}^{(2)},\tilde{G}^{(3)},\dots)$, следующие m^2 строк – $(0,G^{(1)}\otimes G^{(1)},\ \tilde{G}^{(2)}\otimes G^{(1)}+G^{(1)}\otimes\tilde{G}^{(2)},\dots),\dots$

$K=(k^{(1)'},\tilde{K}^{(2)'},\tilde{K}^{(3)'},\ldots)'$, $V=(V^{(1)'},\tilde{V}^{(2)'},\tilde{V}^{(3)'},\ldots)'$. Матрицы $\mathbb{F},\mathbb{G}$ имеют блочно-треугольную структуру. Если умножить обе части (20), (21) скалярно на $X=(x^{(1)'},X^{(2)'},X^{(3)'},\ldots)'$, то получим (4), (5), $v(t,x)=V'(t)X$. Множество достижимости $D_T=\{v(T,\cdot)\}$ определяется множеством достижимости $\{V(T)\}$ в силу $v(T,\cdot)\longleftrightarrow V(T)$.

Для приближенного решения задачи наблюдения ограничимся конечномерной подсистемой

$$\frac{d}{dt}V_s(t) = -\mathbb{F}'_s V_s(t) + \mathbb{G}'_s K_s(t),\ V_s(0)=0, \tag{22}$$

$$\mathbb{F}'_{js} V_s(t) = 0,\ s\geqslant 1,\ j=\overline{1,r},\ t\in[0,T], \tag{23}$$

где V_s, $\mathbb{F}_s$, $\mathbb{F}_{js}$, $\mathbb{G}_s$ – соответствующие подматрицы размерностей $s\times 1$, $\tilde{s}\times\tilde{s}$, $m\times\tilde{s}$, $\tilde{s} = n + n^2+\ldots+ n^s$. Построим с помощью теоремы 2 в (22) допустимое K_s, удовлетворяющее фазовым ограничениям (23), и подставим его в сопряженную систему (4),(5). Выбор $\tilde{K}^{(i)}$, $i>s$, ограничим лишь условием сходимости степенного ряда $k(t,y)=K'(t)Y$, в частности, $\tilde{K}^{(i)}=0$, $i>s$. Полагая $x=x(t;x(T),T,\xi)$, получим:

$$\frac{d}{dt}V'_s(t)X_s+\varepsilon_1+V'_s(t)\mathbb{F}_sX_s+\varepsilon_2 = K'_s(t)\mathbb{G}_sX_s+\varepsilon_3,$$

$$X_s= (x',X^{(2)'},\ldots,X^{(s)'})',\ \varepsilon_i= o(\|x\|^s),$$

откуда после интегрирования на $[0,T]$

$$w_s(x(T)) = V'_s(T)X_s(T) = \int_0^T k(\tau,y(\tau))d\tau + o(\|x(T)\|^s).$$

Следовательно, при движении в достаточно малой окрестности положения равновесия $x=0$ с помощью оператора вида (3) можно приближенно (независимо от ξ) определять значения $w_s(x(T))$ полинома w_s степени не выше s. Использование нескольких различных K_s вместе с информацией $g(x(T))$ позволяет оценивать $x(T)$ в окрестности нуля. Прежде чем строить K_s, целесообразно понизить порядок системы (22) с $\tilde{s}$ до $\bar{s}=\sum_{i=1}^{s} n(n+1)\ldots(n+i-1)/i!$, учитывая тот факт, что компоненты $\tilde{V}^{(p)}(t)$, соответствующие отличающимся лишь перестановкой индексов мономам $x_{i_1}\ldots x_{i_p}$, совпадают.

Если уравнения измеряемых величин также подвержены возмущениям и(или) имеется возможность измерять некоторые возмущения, то необходимо внести коррективы, аналогичные (11)-(18). Изложенная схема построения интегральных операторов идеального наблюдения пригодна и для нестационарного случая (за исключением теоремы 2).

Поскольку "идеальная" схема (3),(4),(5) описывает весьма ограниченное множество операций наблюдения, на практике может оказаться достаточным построение малочувствительной к возмущениям операции, обеспечив малость $\|v(T,\cdot)-\varphi\| + \|v_x F\|$ в соответствующих нормах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский М.С. Идеально наблюдаемые системы// ДАН СССР. 1970.Т.191.№6.С.1224-1227.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением.М.:Наука,1968.
3. Кирин Н.Е. К теории методов оценивания в динамических системах// Вопросы механики и процессов управления.Вып 8.Л.: Изд-во ЛГУ,1986.С.118-125.
4. Заика Ю.В., Кирин Н.Е. Сопряженные задачи идентификации динамических систем//Дифференциальные уравнения.1988.Т.24. №5.С.770-776.
5. Картан А. Дифференциальное исчисление.Дифференциальные формы.М.:Мир,1971.
6. Ланкастер П. Теория матриц.М.:Наука,1982.