

УДК 515.12

Иванов А.В.

МИКСЕРЫ, ФУНКТОРЫ И МЯГКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В работе доказана параметрическая версия теоремы ван Милла и ван де Вэла, утверждающей, что связный компакт с миксером является абсолютным ретрактом. Получен ряд следствий, касающихся ковариантных функторов в категории бикомпактов.

Симметрическим миксером на топологическом пространстве X называется такое непрерывное отображение $\mu: X^3 \rightarrow X$, что значение $\mu(x, y, z)$ не зависит от перестановки координат x, y, z и $\mu(x, x, z) = x$ для любых точек $x, z \in X$ (см. [1]). На всяком пространстве X с миксером μ определено понятие μ -выпуклых подмножеств. Подмножество $A \subset X$ называется μ -выпуклым, если для любых точек $x, y, z \in A$ $\mu(x, y, z) \in A$.

Интерес к изучению бикомпактных пространств с миксером (в дальнейшем мы рассматриваем только бикомпактные хаусдорфовы пространства) был мотивирован следующим результатом ван Милла и ван де Вэла [1].

Теорема. Пусть X - связный метризуемый компакт, на котором задан миксер μ такой, что μ -выпуклые подмножества образуют базу. Тогда X - абсолютный ретракт.

В настоящей работе доказана параметрическая версия приведенной выше теоремы и получен ряд следствий, касающихся функторов.

Пусть (X, μ) - пространство с миксером. Множество $A \subset X$ будем называть сильно μ -выпуклым, если для любых $x, y \in A$ и для любого $z \in X$ $\mu(x, y, z) \in A$. Будем говорить, что миксер μ обладает свойством SC (сильной выпуклости), если для любых точек $a, b \in X$ множество $B_{a,b} = \{x: \mu(a, b, x) = x\}$ сильно μ -выпукло.

Примером миксера со свойством SC может служить миксер μ на отрезке $[0,1]$, который ставит в соответствие тройке точек x, y, z ту из них, что лежит между двумя остальными. Заметим, что произведение миксеров со свойством SC на пространствах X и Y дает миксер с тем же свойством на произведении $X \times Y$. Так что, используя приведенный выше пример, можно построить миксер со свойством SC на всяком n -мерном кубе. Стандартный миксер на суперрасширении λX , который ставит в соответствие тройке максимальных сцепленных систем ξ_1, ξ_2, ξ_3 систему $(\xi_1 \cap \xi_2) \cup (\xi_1 \cap \xi_3) \cup (\xi_2 \cap \xi_3)$ (см. [2]), также обладает свойством SC.

Пусть (X, μ) — пространство с миксером и SCX — пространство замкнутых сильно μ -выпуклых подмножеств X с топологией Вьеториса. (Отметим, что $SCX \supset X$, так как для любой точки $x \in X$ $\{x\}$ сильно μ -выпукло). Отображение $p: X \times SCX \rightarrow X$ назовем отображением ближайшей точки для пространства с миксером (X, μ) , если

- 1) p непрерывно;
- 2) для любой пары x, A $p(x, A) \in A$;
- 3) если $x \in A$, то $p(x, A) = x$.

Справедливо следующее

Предложение. Если миксер μ обладает свойством SC, то для (X, μ) существует отображение ближайшей точки.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $A \in SCX$. Для любой точки $a \in A$ рассмотрим множество $C_{xa} = V_{xa} \cap A$. Покажем, что система $\eta = \{C_{xa} : a \in A\}$ центрирована. Любые два множества системы η пересекаются, поскольку для любых точек $a, b \in A$ $\mu(x, a, b) \in C_{xa} \cap C_{xb}$. Предположим, что мы уже доказали непустоту пересечения любых k множеств системы η . Покажем, что пересечение $L = C_{xa_1} \cap \dots \cap C_{xa_{k+1}}$ также непусто для любых точек $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$. Для этого в каждом пересечении $C_{xa_1} \cap \dots \cap C_{xa_k}, C_{xa_1} \cap \dots \cap C_{xa_{k-1}} \cap C_{xa_{k+1}}$ и $C_{xa_k} \cap C_{xa_{k+1}}$ возьмем соответственно по точке a, b и c и рассмотрим точку $y = \mu(a, b, c)$. В силу сильной μ -выпуклости множеств C_{xa} , очевидно, что $y \in L$.

Итак, система η центрирована и, следовательно, $\bigcap_{a \in A} C_{xa} \neq \emptyset$.

Очевидно, что пересечение $\bigcap_{a \in A} C_{xa}$ состоит из одной точки z , причем эта точка обладает следующим свойством: $\mu(x, a, z) = z$ для любой точки $a \in A$. Точку z будем называть инвариантной точкой множества A

для заданной точки x . Введем обозначение: $p(x, A) = z$. Нетрудно проверить, что p - искомое отображение ближайшей точки. Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - открытое непрерывное отображение связных метризуемых компактов. Пусть на X существует миксер μ такой, что

- 1) для любого $y \in Y$ $f^{-1}y$ сильно μ -выпукло;
- 2) открытые μ -выпуклые множества образуют базу в X ;
- 3) μ обладает свойством SC.

Тогда f - мягкое отображение.

Доказательство. В условиях теоремы X является абсолютным ретрактом. Кроме того, для (X, μ) существует отображение ближайшей точки p . Проверим выполнение определения мягкости для отображения f . Пусть Z - бикомпакт, A - замкнутое подмножество Z и $g: Z \rightarrow Y$, $h: A \rightarrow X$ такие непрерывные отображения, что $g|_A = f \circ h$. Рассмотрим произвольное продолжение $h': Z \rightarrow X$ отображения h и положим $H(z) = p(h'(z), f^{-1}g(z))$. Тогда H - искомое продолжение h .

Теорема доказана.

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 можно отбросить требование метризуемости X, Y и условие 2), если потребовать дополнительно, что X - абсолютный ретракт (или абсолютный экстензор в размерности n ; в этом случае отображение f будет n -мягким).

Теорема 2. Пусть $F: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ - ковариантный непрерывный сохраняющий вес функтор из категории бикомпактов и непрерывных отображений в ту же категорию, который сохраняет свойство открытости отображений и свойство связности пространств. Пусть на каждом пространстве FX задан канонический миксер μ_x со свойством SC, такой, что открытые μ -выпуклые множества образуют базу пространства FX и для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ отображение Ff коммутирует с миксерами μ_x и μ_y , т.е. $Ff(\mu_x(x, y, z)) = \mu_y(Ff(x), Ff(y), Ff(z))$. Тогда

- 1) для любого связного α -метризуемого бикомпакта X FX есть AR ;
- 2) для любого открытого отображения связных α -метризуемых бикомпактов $f: X \rightarrow Y$ Ff является мягким отображением;

3) для любого \mathfrak{A} -метризуемого бикompакта X FX есть бикompакт Дугунджи;

4) для любого открытого отображения $f: X \rightarrow Y$ \mathfrak{A} -метризуемых бикompактов отображение Ff является 0-мягким.

Изложим кратко идею доказательства теоремы.

Доказательство пунктов 1) и 2) проводится одновременно по индукции по весу X . В силу условий на функтор F для любого связного X веса ω_0 FX является абсолютным ретрактом. Следовательно, для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ связных пространств веса ω_0 отображение Ff удовлетворяет условиям теоремы 1 (см. замечание 1; условие 1) теоремы 1 вытекает из условия коммутирования миксеров μ_x и μ_y с отображением Ff). Следовательно, Ff - мягкое отображение.

Предположим теперь, что условия 1), 2) доказаны для всех X веса $< \tau$ и пусть $\omega X = \tau$. Разложим X в спектр $S = \{X_\alpha, \tau_\alpha^\alpha: \alpha, \beta < \tau\}$ с открытыми проекциями и \mathfrak{A} -метризуемыми X_α . Спектр $FS = \{FX_\alpha, F\tau_\alpha^\alpha: \alpha, \beta < \tau\}$ состоит из AR-пространств и мягких отображений. Следовательно, в силу теоремы Е.В.Щепина [3] $\lim FS = FX$ есть абсолютный ретракт. Наконец, в силу замечания 1 и свойств функтора F получаем, что если $f: X \rightarrow Y$ - открытое отображение связных \mathfrak{A} -метризуемых бикompактов, то $Ff: FX \rightarrow FY$ - мягкое отображение.

Условия 3) и 4) доказываются аналогично.

Замечание 2. Для доказательства условий 3) и 4) не используется требование, что μ -выпуклые множества образуют базу в FX .

Нетрудно проверить, что условиям теоремы 2 удовлетворяют, в частности, функтор суперрасширения λ и функтор полных сцепленных систем N (см. [4]). Таким образом, полученные ранее автором характеристики классов \mathfrak{A} -метризуемых бикompактов и связных \mathfrak{A} -метризуемых бикompактов в терминах λ и N (см. [4-6]) являются непосредственным следствием теоремы 2 и тем самым их доказательства значительно упрощаются. Автору не известно, можно ли с помощью аппарата миксеров упростить доказательства следующих, полученных им ранее, результатов, имеющиеся доказательства которых требуют пока привлечения громоздкой спектральной техники.

Теорема 3. Для непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ связных

однородных по характеру α -метризуемых бикомпактов следующие условия эквивалентны:

- 1) f открыто и не имеет точек однократности;
- 2) Λf является тривиальным I^T -расслоением, где $\tau = \pi X$;
- 3) Nf является тривиальным I^T -расслоением.

Теорема 4. Для непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ нульмерных однородных по характеру α -метризуемых бикомпактов следующие условия эквивалентны:

- 1) f открыто и $|f^{-1}y| > 1$ для любого $y \in Y$;
- 2) Λf является тривиальным D^T -расслоением, где $\tau = \pi X$;
- 3) Nf является тривиальным D^T -расслоением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Mill J., van de Vel. On an internal property of Absolute Retracts // Top. Proc. 1979. V.4. P.193-200.
2. Дранишников А.Н. Миксеры. Обращение одной теоремы ван Милла - ван де Вэла // Математические заметки. 1985. Т.37. Вып. 4. С.587-593.
3. Щепин Е.В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи матем. наук. 1976. Т.31. Вып.5. С. 191-226.
4. Иванов А.В. Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов // Доклады АН СССР. 1981. Т. 259. № 2. С.275-278.
5. Иванов А.В. Решение проблемы ван Милла о характеристизации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Доклады АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 526-528.
6. Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сибирский матем. журнал. 1986. Т.27. № 6. С. 95-110.