Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика"   Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Моисеев Е.В.

О ПРОСТРАНСТВАХ С М-СТРУКТУРОЙ

В статье вводится понятие пространства с М-структурой, которое обобщает некоторые свойства пространств λX, ExpX, GX, NX и других.

Основное определение. Будем говорить, что на метрическом пространстве (X,ρ) задана М-структура, если любому непрерывному отображению $f:\partial\sigma\to X$, заданному на границе $\partial\sigma$ симплекса σ ($\dim\sigma\geqslant 2$), поставлено в соответствие непрерывное продолжение $\bar f:\sigma\to X$ на весь симплекс и это соответствие удовлетворяет двум условиям:

1. Постоянному отображению f соответствует постоянное $\bar f$.

2. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого симплекса σ ($\dim\sigma\geqslant 2$), любых двух непрерывных отображений f_1 и f_2 1-мерного остова σ_1, симплекса σ в X их непрерывные продолжения $\bar f_1$ и $\bar f_2$, имеющие одинаковые комбинаторные схемы, удовлетворяют условию:

если $\max\limits_{x\in\sigma_1}\rho(f_1(x),f_2(x))<\delta$, то $\max\limits_{x\in\sigma_1}\rho(\bar f_1(x),\bar f_2(x))<\varepsilon$.

Здесь необходимо сформулировать определение комбинаторной схемы продолжения (к.с.п.). Рассмотрим некоторый стандартный симплекс σ ($\dim\sigma\geqslant 2$). Если отображение g задано на 1-мерном остове σ, то с помощью М-структуры его можно продолжить на весь симплекс σ. Продолжение будем производить последовательно на n-мерные остовы. Сначала возьмем некоторую двумерную грань $(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3})$ симплекса σ. Сечение отображения g на границе этой грани продолжаем на всю грань. Для этого с помощью линейного гомеоморфизма отождествим симплекс $(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3})$ со стандартным симплексом (e_1, e_2, e_3) и продолжим отображение, пользуясь М-структурой. Так, перебрав все двумерные грани, перейдем к трехмерным и так далее. В результате получим продолжение $\bar{g}$ отображения g, но это продолжение, вообще говоря, определено не однозначно. В частности, на том шаге, который мы рассмотрели подробно, оно зависит от того, как мы вершинам $e_{1_1}, e_{1_2}, e_{1_3}$ сопоставили вершины e_1, e_2, e_3. Комбинаторной схемой продолжения будет называться способ, которым мы каждой К-мерной грани симплекса б $(2 \leqslant K \leqslant \dim б)$ сопоставили стандартный К-мерный симплекс.

Множество $Z \leqslant X$ будем называть М-выпуклым, если условие $f(\partial б) \leqslant X$ влечет включение $\bar{f}(б) \leqslant Z$ для любого б $(\dim б \geqslant 2)$.

Метрическое пространство (X, ρ) с заданной на нем М-структурой будем называть М-пространством.

Предложение 1. Пусть на метрическом пространстве (X, ρ) определен способ, с помощью которого каждому непрерывному отображению окружности $g : S_1 \to X$ поставлено в соответствие непрерывное продолжение этого отображения на круг $\bar{g} : B_2 \to X$, которое удовлетворяет двум условиям :

1. Постоянному g соответствует постоянное $\bar{g}$.
2. Для любых g_1 и g_2 справедливо :

$$\max_{x \in S_1} \rho(g_1(x), g_2(x)) = \max_{x \in B_2} \rho(\bar{g}_1(x), \bar{g}_2(x)).$$

Тогда на этом пространстве можно определить М-структуру.

Доказательство. Сначала покажем, что структура, описанная в формулировке предложения, естественным образом поднимается по индукции в любую размерность, то есть сферу S_1 в формулировке предложения можно заменить на S_n $(n \geqslant 2)$, а круг B_2 соответственно на $n+1$-мерный шар B_n.

Итак, база индукции содержится в формулировке предложения. Идею индукционного перехода удобно рассмотреть на первом шаге. Пусть B_2 и B_3 - шары с центром в 0 и радиусом 1 в пространствах R_2 и R_3 соответственно. Обозначим через h_z "непрерывное" семейство гомеоморфизмов B_2 в B_3 : $(x,y) \xrightarrow{h_z} (x \cdot \sqrt{1-z^2}, y \cdot \sqrt{1-z^2}, z)$. Пусть дано непрерывное отображение $g : S_2 \to X$, тогда композиция отображений $g \circ h_z |_{S_1}$ по индукционному предложению имеет продолжение $\overline{g\circ h_z} : B_2 \to X$. Продолжение $\bar{g} : B_3 \to X$ определим как композицию $\bar{g}(t) = \overline{g\circ h_z}\circ h_z^{-1}(t)$, где $t=(x,y,z)$.Легко проверяется, что это отображение удовлетворяет необходимым свойствам.

Для определения на пространстве X М-структуры осталось зафиксировать семейство гомеоморфизмов, переводящих n-мерные шары в n-мерные симплексы ($n \geq 2$). Заметим, что для этой М-структуры справедливо равенство $\varepsilon = \delta$. Доказательство предложения закончено. Пространства со структурой, описанной в предложении 1, ниже мы будем тоже называть М-пространствами.

Примеры М-пространств

1. Линейные нормированные пространства.

На этих пространствах существует структура, описанная в предложении 1, начиная с размерности 0. В этом случае B_1 - это просто отрезок $[0,1]$, а S_0 - пара точек $\{0,1\}$. Пусть $f(0) = x$, $f(1) = y$, тогда $\bar{f}(t) = (1-t)\cdot x + t\cdot y$, где $0 \leq t \leq 1$. Очевидно, что постоянному отображению соответствует постоянное продолжение, а также справедлива цепочка неравенств :

$$\| \bar{f}_1(t)-\bar{f}_2(t)\| = \|(1-t)\cdot(x_1-x_2) + t\cdot(y_1-y_2)\| \leq \|(1-t)\cdot(x_1-x_2)\| +$$
$$+ \| t\cdot(y_1-y_2)\| = (1-t)\cdot\| x_1-x_2\| + t\cdot\| y_1-y_2\|.$$

Следовательно, выполняется и второе условие.

Далее, используя идею предложения 1, поднимаем эту структуру в любую размерность.

2. Пространство с миксером (см.[1]) , если миксер удовлетворяет условию :

$$\rho(\mu(x_1,\ldots,x_n), \mu(y_1,\ldots,y_n)) \leq \max_{i=\overline{1,k}} \rho(x_i,y_i). \qquad (*)$$

Миксер - это непрерывное отображение $\mu : \underbrace{X\times\ldots\times X}_{k} \to X$ со свойством :

$$\mu(x,x,\ldots,x,y) = \mu(x,x,\ldots,y,x) = \ldots = \mu(y,x,\ldots,x) = x.$$

Для удобства рассуждений считаем $k = 3$.

На таком пространстве М-структура строится следующим образом. Зафиксируем на окружности S три различных точки :

$t', t'', t''' \in S$.

Пусть $g : S \to X$ - непрерывное отображение и $x \in B$. Тогда $\bar{g}(x) = \mu(g(pr'(x)),\ g(pr''(x)),\ g(pr'''(x)))$, где $pr'(x)$ - проекция точки x на сферу S лучом, проходящим через x и имеющим начало в t' (аналогично определяются отображения pr'' и pr'''). В статье [1] проверяется непрерывность отображения $\bar{g}$. Условие (*) обеспечивает выполнение необходимого для M-структуры свойства, M-выпуклость точек в этом случае очевидна.

Для компакта X пространства λX, NX, $N_k X$, GX можно определить как подпространства $Exp(Exp\ X)$ (см. ниже), состоящие соответственно из гиперпространств включения (г.в.) максимальных относительно условия сцепленности, сцепленных г.в., k - сцепленных г.в., просто г.в. (подробности см. [1], [2], [3]).

Теорема 1. Пусть X - компакт, тогда пространства λX, NX, $N_k X$, GX будут M-пространствами в метрике Хаусдорфа второй экспоненты $Exp(Exp\ X)$.

Доказательство. Имеет место включение $\lambda X \leqslant NX \leqslant GX$. На GX существует стандартный миксер

$$\mu(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 \cap \zeta_2) \cup (\zeta_2 \cap \zeta_3) \cup (\zeta_1 \cap \zeta_3)$$

(ζ_i рассматриваются как подмножества $Exp\ X$), а λX и NX - M-выпуклые подмножества.

Проверим условие (*). Для этого надо показать, что для всяких $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2 \in GX$

$$\rho_H(\zeta_1 \cap \eta_1, \zeta_1 \cap \eta_2) \leqslant \max_{i=1,2} \rho_H(\zeta_i, \eta_i),$$

$$\rho_H(\zeta_1 \cap \eta_1, \zeta_2 \cap \eta_2) \leqslant \max_{i=1,2} \rho_H(\zeta_i, \eta_i).$$

Неравенство для объединений справедливо в метрике Хаусдорфа для любых подмножеств, а неравенство для пересечений влечет импликация $F \in \zeta_1 \cap \zeta_2 \Rightarrow B(F, \varepsilon) \in \eta_1 \cap \eta_2$ ($B(F, \varepsilon)$ - замкнутый ε-шар).

Доказательство утверждения теоремы для $N_k X$ проводится аналогично с использованием K-миксера.

3. Пространства $Exp\ X$, $Exp_c X$, $Comp\ X$, $Comp_c X$.

$Exp\ X$ - пространство непустых, ограниченных замкнутых подмножеств с метрикой Хаусдорфа (ниже везде будут рассматриваться только ограниченные замкнутые подмножества).

$Exp_c X$ - подпространство $Exp\ X$, состоящее из связных подмножеств.

$\mathrm{Comp}\,X$ - подпространство $\mathrm{Exp}\,X$, состоящее из компактных подмножеств.

$\mathrm{Comp}_c X$ - подпространство $\mathrm{Comp}\,X$, состоящее из связных подмножеств.

Теорема 2. Пространство $\mathrm{Exp}\,X$ является М-пространством.

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы, которые доказываются стандартно.

Лемма 1. Объединение компактного семейства (в смысле $\mathrm{Exp}\,X$) ограниченных замкнутых множеств - ограниченно и замкнуто в X.

Лемма 2. Объединение связного компактного семейства связных замкнутых множеств - связно.

Доказательство теоремы. Пусть $g : S \to \mathrm{Exp}\,X$ - непрерывное отображение, круг B вкладывается в $\mathrm{Comp}_c S$ так, что S является его границей при естественном вложении (лемма 4 [4]). Ниже B будет пониматься как подмножество $\mathrm{Comp}_c S$. Продолжение отображения g построим следующим образом : $\bar{g} = C \circ \mathrm{Comp}_c\, g|_B$, где $C : \mathrm{Comp}_c S \to \mathrm{Comp}_c(\,\mathrm{Exp}\,X\,)$ - отображение объединения, а $\mathrm{Comp}_c g : \mathrm{Comp}_c S \to \mathrm{Comp}_c(\,\mathrm{Exp}\,X\,)$. Непрерывность C доказывается в пункте б).

а) Для любых непрерывных отображений g_1 и g_2 в любое метрическое пространство $g_1 , g_2 : S \to Z$ справедливо равенство :

$$\max_{\varphi \in \mathrm{Comp}_c S} \rho_H(\,\mathrm{Comp}_c g_1(\varphi)\,,\ \mathrm{Comp}_c g_2(\varphi)\,) = \max_{x \in S} \rho(\,g_1(x)\,,\ g_2(x)\,).$$

б) Если $F\,,\ \Phi \in \mathrm{Comp}_c(\,\mathrm{Exp}\,X\,)$, тогда по лемме 1 $C(\Phi)$ и $C(F) \in \mathrm{Exp}\,X$ и $\rho_H(\,C(F)\,,\ C(\Phi)\,) \leqslant \rho_{H^2}(\,F\,,\ \Phi\,)$.

Проверим последнее неравенство. Пусть $x \in C(\Phi)$, тогда $x \in \varphi \in \Phi$ и, следовательно, существует $f \in F$, что $\rho_H(\,\varphi, f\,) = \rho_{H^2}(\,F, \Phi\,) = \varepsilon$, то есть $\varphi \in B(\,f, \varepsilon\,)$, где $B(\,f, \varepsilon\,)$ - замкнутый ε-шар в метрике ρ_H . Последнее влечет существование $y \in f$ такого, что $\rho(\,x, y\,) < \varepsilon$. Таким образом, для любой точки $x \in C(\Phi)$ существует точка $y \in C(F)$, удовлетворяющая условию : $\rho(\,x, y\,) = \rho_{H^2}(\,F, \Phi\,)$, и , наоборот, для любой точки $y \in C(F)$ существует $x \in C(\Phi)$ с тем же условием. Утверждение б) доказано.

Из а) и б) следует, что на $\mathrm{Exp}\,X$ действительно определена

М-структура, а выпуклость точек относительно этой М-структуры очевидна.

Следствие. Пространства $Exp_c X$,Comp X , $Comp_c X$ являются М-пространствами.

Доказательство. Из леммы 2 и доказательства теоремы 2 следует, что $Exp_c X$ является М-выпуклым подмножеством Exp X. Из лемм 2′ и 2′′ статьи У.Ташметова [4] следует, что Comp X и $Comp_c X$ являются М-выпуклыми подмножествами Exp X .

4. Ретракты М-пространств при равномерно непрерывных ретракциях, в частности , пространства упорядоченных дуг Г(X) и $Г^c(X)$ (см.[5]), если ретракции коммутируют с М-структурой, то есть для любого непрерывного отображения границы симплекса f справедливо $Г\circ\tilde{f} = \widetilde{Г\circ f}$.

Если X - континуум , то на Г(X) и $Г^c(X)$ существует специальная параметризация (теорема 2.1 [5]) , связанная отображением Уитни . Г(X) и $Г^c(X)$ являются М-пространствами в метрике $\max\limits_{t\in[0,1]} \rho_H(\gamma(t),\alpha(t))$,где $\gamma(t)$ и $\alpha(t) \in Г(X)$. Для доказательства этого надо воспользоваться леммой 3.3 [5] о том ,что Г(X) является ретрактом Comp(Г(X)).

5. М-пространствами являются прямые произведения М-пространств в метрике максимума .

Теорема 3. Пусть X - локально линейно (и линейно) связное М-пространство , тогда X - ANR ($\mathcal{M}$) - абсолютный окрестностный (AR ($\mathcal{M}$) - абсолютный) ретракт в классе метрических пространств.

Доказательство. Докажем, что X ∈ AE($\mathcal{M}$) , то есть является абсолютным экстензором в классе метрических пространств, в данном случае это эквивалентные утверждения (см. [6, с. 98]).

Пусть (Y,ρ) - метрическое пространство, A - замкнутое подмножество Y, $f : A \to X$ - непрерывное отображение.

Существует каноническое покрытие $G = \{ G_\lambda \mid \lambda \in L \}$ множества Y \ A (см. [6, с. 76]). Это покрытие локально конечно, и для любой точки $a \in A$, любой ее окрестности V_a в пространстве Y существует такая окрестность W_a точки a в Y , что из неравенства $G_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$ следует, что $G_\lambda \subset V_a$.

Пусть N - нерв покрытия G , N является политопом с триангуляцией — ,образованной всеми симплексами вида

$\sigma(G_{\lambda_0},\ldots,G_{\lambda_k})$, где $G_{\lambda_0}\cap\ldots\cap G_{\lambda_k}\neq\emptyset$.

План дальнейших рассуждений такой : мы построим некоторое отображение $f_\infty : N \to X$ и докажем, что отображение $\bar{f} : Y \to X$, равное :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in A, \\ f_\infty \circ \varkappa(x), \text{ если } x \in Y\setminus A, \end{cases}$$

является непрерывным продолжением отображения f ($\varkappa : Y\setminus A \to N$ - каноническое отображение (см. [6, с. 86]).

Итак, определим отображение f_0 на 0-мерном остове N_0 триангуляции $-$, сопоставив каждой вершине G_λ точку $a_\lambda \in Y$ так, что $\rho(a_\lambda, G_\lambda) < 2 \sup\limits_{x\in G_\lambda} \rho(x,A)$. Положив $f_0(G_\lambda) = f(a_\lambda)$ для любой вершины G_λ из N_0, получаем непрерывное отображение $f_0 : N_0 \to X$.

Пусть σ - 1-мерный симплекс триангуляции N_1. Отображение f_0 продолжим на σ таким образом, что $\operatorname{diam}(f_1(\sigma))$ меньше удвоенного инфинума диаметров всевозможных продолжений отображения f_0. Далее отображение f_1 продолжаем последовательно на k-мерные остовы N_k триангуляции $-$ с помощью М-структуры.

Пусть определено отображение $f_k : N_k \to X$. Рассмотрим симплекс $\sigma \in N_{k+1}$. Отображение f_k определено на границе $\partial\sigma$, поэтому определено отображение $\bar{f}_k : \sigma \to X$. Таким образом, $f_{k+1}|_\sigma = \bar{f}_k|_\sigma$ и отображение $f_\infty : N \to X$ задано на всем нерве N.

Проверим, что отображение $\bar{f}$ действительно является непрерывным. В самом деле, из конструкции f_∞ следует, что f_∞ является непрерывным отображением нерва N в пространство X. Так как покрытие G локально конечно, то это влечет непрерывность отображения $\bar{f}$ во внутренних, то есть во всех, точках множества $X\setminus A$. Во внутренних точках множества A непрерывность отображения $\bar{f}$ очевидна. Осталось проверить, что отображение $\bar{f}$ непрерывно в любой точке $x \in A\setminus(\overline{Y\setminus A})$. Следующее свойство является простым следствием условий 1 и 2 из определения М-структуры : для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для любой точки $x \in X$, любого симплекса σ, любого непрерывного отображения $\varphi : \sigma_1 \to O_\delta x$ 1-мерного остова σ в δ-окрестность точки x продолжение этого отображения $\bar{\varphi}$ на весь симплекс б по любой комбинаторной схеме попадает в $O_{\varepsilon}x$ - ε-окрестность точки x. Из конструкции отображения $f_1 : N_1 \to X$ следует, что существует окрестность V точки f(x), такая, что если $f_0(б_0) \subset V$, то $f_1(б_1) \subset O_{\delta}x$ для любого симплекса б $\in$ - ($б_0$,$б_1$ - соответствующие остовы симплекса б). В самом деле, по определению локальной линейной связности, для любого $\mu>0$ существует $\eta>0$, такое, что если $t_1, t_2 \in O_{\eta}f(x)$, то существует путь, связывающий t_1 с t_2 и содержащийся в $O_{\mu}f(x)$.

Последнее вместе с определением отображения f_1 влечет импликацию : $f_0(б_0) \subset O_{\eta}f(x)$, тогда $f_1(б_1) \subset O_{2\mu}f(x)$. Из непрерывности отображения f следует существование окрестности W_x, такой, что если $a_{\lambda} \in W_x$ (см. определение f_0), то $f(a_{\lambda}) \in V$, а так как покрытие G каноническое, то существует окрестность Ox со свойством : $G_{\lambda} \cap Ox \neq \emptyset \Rightarrow a_{\lambda} \in W$.

Таким образом, если $y \in Ox$, то $\varkappa(y) \in б$ и $f_{\infty}(б) \leqslant O_{\delta}x$ (так как $f_0(б_0) \leqslant V$ б $f_1(б_1) \leqslant O_{\delta}x$ б $f_{\infty}(б) \leqslant O_{\varepsilon}x$), а , значит , $\bar{f}(Ox) \leqslant U$, то есть отображение $\bar{f}$ непрерывно в точке x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mill J. van. An almost fixed point theorem for metrisable continua //Arch. Math. 1983. V. 40. P. 159 - 169.
2. Иванов А.В. О пространствах полных сцепленных систем // Сиб. матем. журн. 1986. Т.27. N 6. С. 95 - 110.
3. Моисеев Е.В. О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения //Вестник МГУ, сер.1. 1988. N 3. С.54 - 57.
4. Ташметов У.О. О связности и локальной связности некоторых гиперпространств //Сиб. матем.журн. 1974. Т.15. N 5. С.1115 - 1130.
5. Eberhart C., Nadler S., Nowell N.O. Spaces of order arcs in hyperspaces // Fund. Math. 1981. V. 112. N 2. P. 111 - 120.
6. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971. С. 291.