Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.986
Мосягин В.В.

К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

В статье доказаны теоремы о неподвижных точках монотонных и гетеротонных операторов в локально выпуклых линейных топологических пространствах с конусом.

1. Пусть (X,τ) - вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое топологическое пространство; $P=\{p\}$ - система полунорм, определяющих топологию τ в X [1]; θ - нуль пространства X.

Определение 1.1. Замкнутое выпуклое множество $K\subset X$ называется конусом, если $x\in K$, $x\neq\theta$ влечет за собой $\alpha x\in K$ при $\alpha\geqslant 0$ и $-x\bar{\in} K$.

Любой конус $K\subset X$ позволяет ввести в X полуупорядоченность: $x > y$ (равносильно $y<x$), если $x-y\in K$. Элементы $x>\theta$ (то есть $x\in K$) называются положительными.

Использование полуупорядоченности при изучении операторов, действующих в X, опирается на знание свойств отношения $>$.

Предложение 1.1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - две топологически сходящиеся (соответственно к точкам x_o, y_o) последовательности в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K,

$$x_n \xrightarrow{\tau} x_o,\quad y_n \xrightarrow{\tau} y_o,$$

причем

$$x_n < y_n \quad (n=1,2,\dots). \tag{1.1}$$

Тогда $x_o < y_o$.

Доказательство. Соотношение (1.1) означает, что $y_n-x_n\in K$ $(n=1,2,\dots)$. В силу замкнутости K предел y_o-x_o последовательности y_n-x_n $(n=1,2,\dots)$ также принадлежит K. Утверждение доказано.

Наличие полуупорядочения в X позволяет ввести понятия мажоранты, миноранты, супремума и инфимума.

Если множество $M \subset X$ имеет мажоранту, то его называют ограниченным сверху; если имеет миноранту - ограниченным снизу.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядочение в локально выпуклом пространстве X, может обеспечить наличие дополнительных свойств у отношения $\geqslant$. Это обстоятельство, как и в случае банаховых пространств [2], стимулирует изучение различных классов конусов в X.

Ниже всюду через X будем обозначать вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое пространство, полуупорядоченное при помощи конуса K.

Определение 1.2. Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ имеет точную верхнюю границу $\tilde{z} = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и сильно миниэдральным, если точная граница есть у любого ограниченного сверху множества.

Определение 1.3. Конус K в пространстве X называется б-правильным, если каждая неубывающая последовательность

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant \dots, \tag{1.2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \leqslant y \quad (n=1,2,\dots), \tag{1.3}$$

сходится топологически в X.

Предложение 1.2. Если конус $K \subset X$ б-правильный, то каждая последовательность $\{x_n\}$, удоблетворяющая соотношению

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n \geqslant \dots \geqslant u \tag{1.4}$$

при некотором $u \in X$, сходится в топологии τ.

Доказательство очевидно.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.14 из работы [2].

Теорема 1.1. Пусть в пространстве X конус K б-правилен и миниэдрален. Тогда каждая ограниченная сверху последовательность имеет точную верхнюю границу.

Доказательство. Пусть

$$x_n \leqslant z \quad (n=1,2,\dots). \tag{1.5}$$

Тогда очевидно,

$$y_n=\sup\{x_1,x_2,\dots,x_n\} \leqslant z \quad (n=1,2,\dots). \qquad (1.6)$$

Так как последовательность $\{y_n\}$ не убывает и ограничена сверху, то она сходится в топологии τ к некоторому пределу $z_0 \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $y_n \leqslant y_{n+k}$ при $k \to \infty$, получим $y_n \leqslant z_0$ $(n=1,2,\dots)$, откуда следует, что $x_n \leqslant z_0$ $(n=1,2,\dots)$.

Допустим, что выполнены соотношения (1.5). Тогда выполнены соотношения (1.6), переходя в которых к пределу $n \to \infty$, получим неравенство $z_0 \leqslant z$. Значит, z_0 является точной верхней границей последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Определение 1.4 [1]. Конус К в пространстве X называется нормальным, если существует система полунорм $P=\{p\}$, определяющих топологию τ пространства X, монотонных на конусе (если $\theta \leqslant x \leqslant y$, то $p(x) \leqslant p(y)$ для каждой полунормы p из P).

2. Тот факт, что вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое пространство X полуупорядочено при помощи некоторого конуса К, может использоваться при изучении оператора A, действующего в X, лишь в том случае, когда A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 2.1. Оператор A, действующий в пространстве X, называется:

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $\mathfrak{D} \subseteq X$, если из $x,y \in \mathfrak{D}$, $x \geqslant y$ следует $A(x) \geqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы. Для линейного оператора из свойства положительности следует монотонность.

Множество элементов $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам

$$v_0 \leqslant x \leqslant w_0,$$

где v_0, w_0 - фиксированные элементы из X, называется конусным отрезком и обозначается через $\langle v_0,w_0 \rangle$.

Легко доказать, что если К - нормальный конус в X, то множество $\langle v_0,w_0 \rangle$ ограничено по полунормам.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в X, могут быть указаны такие элементы v_0, w_0, что $v_0 \leqslant w_0$ и

$$Av_o > v_o, \ Aw_o < w_o. \tag{2.1}$$

Тогда оператор A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle v_o, w_o \rangle$. Действительно, в этом случае неравенства

$$v_o \leq x \leq w_o$$

влекут за собой неравенства

$$v_o \leq A(v_o) \leq A(x) \leq A(w_o) \leq w_o. \tag{2.2}$$

Построим последовательности

$$v_n = A(v_{n-1}), \ w_n = A(w_{n-1}) \ (n=1,2,\dots). \tag{2.3}$$

Первая из них в силу (2.1) монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому указанные последовательности сходятся, если конус K б-правильный. Если оператор A непрерывен, то в равенствах (2.3) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = A(v^*), \ w^* = A(w^*),$$

где v^* - предел последовательности $\{v_n\}$, а w^* - предел последовательности $\{w_n\}$. При этом элементы v^*, w^* могут быть различными.

Приведенные рассуждения показывают, что для доказательства существования решений уравнения

$$x = A(x)$$

в пространстве X с непрерывным и монотонным оператором A и для построения сходящихся последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_o, w_o, удовлетворяющих соотношениям (2.1). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть K - б-правильный конус в X. Пусть непрерывный и монотонный на конусном отрезке $\langle v_o, w_o \rangle$ оператор A преобразует этот отрезок в себя.

Тогда оператор A имеет на $\langle v_o, w_o \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку. При этом последовательности (2.3) сходятся к неподвижным точкам оператора A.

Следующая теорема гарантирует существование неподвижной точки у разрывного оператора A, действующего в пространстве X.

Теорема 2.2 (принцип Биркгофа-Тарского [2]). Пусть конус K в пространстве X сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор A (не обязательно непрерывный), оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v_o, w_o \rangle$, имеет на $\langle v_o, w_o \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

3. В пространстве X рассмотрим класс операторов, обладающих свойством своеобразной обобщенной монотонности. Следуя работе [3], дадим следующие определения.

Определение 3.1. Оператор V, действующий в вещественном полном хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса $K\subset X$, называется гетеротонным, если он допускает диагональное представление

$$V(x)=W(x,x), \tag{3.1}$$

причем оператор $W(v,w)$, действующий из $X\times X$ в X, монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму.

Определение 3.2. Конусный отрезок $\langle v_o,w_o\rangle$ назовем сильно инвариантным для гетеротонного оператора V, если

$$W(v_o,w_o) \geqslant v_o,\ W(w_o,v_o) \leqslant w_o.$$

Замечание 3.1. Из сильной инвариантности $\langle v_o,w_o\rangle$ следует его обычная инвариантность для V, так как если $x\in\langle v_o,w_o\rangle$, то $v_o \leqslant W(v_o,w_o) \leqslant W(x,x)=V(x) \leqslant W(w_o,v_o) \leqslant v_o$.

В дальнейшем существенную роль будет играть условие

δ. Система уравнений

$$W(v,w)=v,\ W(w,v)=w \tag{3.2}$$

на множестве $M \subset X \times X$ не имеет решений таких, что $v \neq w$.

Введение в множестве пар элементов (v,w) систему полунорм

$$\tilde{p}(v,w)=p(v)+p(w),\ p \in P, \tag{3.3}$$

превращает $X\times X$ в вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое пространство.

Теорема 3.1. Пусть конусный отрезок $\langle v_o,w_o\rangle$ является сильно инвариантным для гетеротонного оператора V и на $\langle v_o,w_o\rangle$ выполнено условие δ. Пусть, кроме того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) конус K б-правильный, оператор W непрерывен;

2) конус K сильно миниэдрален.

Тогда у оператора $\dot{V}$ существует неподвижная точка $x^* \in \langle v_o,w_o\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\tilde{V}:X\times X \longrightarrow X\times X$, который паре элементов (v,w) сопоставляет пару $(W(v,w),W(w,v))$. Легко видеть, что из непрерывности оператора W следует непрерывность оператора $\tilde{V}$.

Введем далее полуупорядоченность в X×X по правилу: $(v',w')>(v,w)$, если $v'>v$, $w'<w$. Можно считать, что полуупорядоченность, определяемая знаком >, вводится при помощи конуса

$$\tilde{K}=\{(v,w):\ v\in K,\ -w\in K\}.$$

При этом очевидно, что б-правильность, миниэдральность конуса K влекут за собой наличие соответствующих свойств у конуса $\tilde{K}$.

Завершим доказательство следующим образом. Очевидно, что из $(v',w')>(v,w)$ следует $\tilde{V}(v',w')>\tilde{V}(v,w)$, т.е. оператор $\tilde{V}$ является монотонным. Кроме того, $\tilde{V}$ оставляет инвариантным конусный отрезок

$$<(v_o,w_o),(w_o,v_o)>=\{(v,w):\ (v_o,w_o)<(v,w)<(w_o,v_o)\}.$$

Теперь из теорем о существовании неподвижной точки у монотонного оператора следует, что в наших предположениях $\tilde{V}$ имеет неподвижную точку (v^*,w^*), которая, очевидно, является решением системы уравнений (3.2). В силу условия δ $v^*=w^*$. Следовательно, оператор V имеет неподвижную точку $x^*=v^*=w^*$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Список условий 1)-2) можно продолжить. В него можно включить любое условие, которое обеспечивает существование неподвижной точки у монотонного оператора, имеющего инвариантный конусный отрезок. Например, можно было бы добавить условие: конус K - нормальный, оператор V - вполне непрерывный (определение вполне непрерывного оператора, действующего в локально выпуклом пространстве, дано в работе [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. С. 359.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. С. 394.
3. Опойцев В.И. Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986. С. 248.
4. Schaefer H. Uber die Methode der apriori Schranken // Math. Annalen. 1955. Bd. 129. S. 415-416.