Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 518.3

Нижник П.П., Аюкаев Р.И.

АНАМОРФОЗА ДЕКАРТОВА АБАКА В СОСТАВНЫХ НОМОГРАММАХ

Получена нелинейная анаморфоза декартова абака, с использованием которой разработана номограмма, пригодная для практических расчетов.

Задача отыскания линейной анаморфозы $\bar{x}=\varphi(x)$, $\bar{y}=\psi(y)$ уравнения $f(x,y,z)=0$, как показывает практика, разрешима не всегда.

Теорема 1. Чтобы уравнение $f(x,y,z)=0$ допускало анаморфозу, необходимо и достаточно, чтобы отношение частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ можно было бы представить в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых является функцией лишь одного аргумента.

Из уравнений анаморфозы имеем

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ но } \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}.$$

Поэтому $\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} R(z)$, т.е. касательная во всех точках каждой кривой имеет одно и то же направление.

Из последнего имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = -\varphi'(x)\,(\psi'(y))^{-1} R(z).$$

Верно и обратное. Если отношение частных производных представляется произведением трех множителей, являющихся функцией трех переменных, то уравнение допускает анаморфозу, выпрямляющую декартов абак.

Пусть $\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = M(x)\ N(y)\ P(z)$. Выполним анаморфозу

$\bar{x}=\int M(x)dx+C_1$, $\bar{y}=\int \dfrac{dy}{N(y)}+C_2$. Угловой коэффициент касательной к

кривой $\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{x}}=\dfrac{1}{M(x)\ N(y)}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}$. Но

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-M(x)\ N(y)\ P(z).$$

Поэтому $\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{x}}=-\dfrac{1}{M(x)\ N(y)}\cdot M(x)\ N(y)\ P(z)=-P(z)$. Таким обра-

зом, $\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{x}}$ есть функция одного тольке z и, следовательно, во всех точках одной и той же линии абака направление касательной одно и то же. Следовательно, линии абака прямые.

Возможность представления отношения $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в форме произведения трех множителей не только доказывает возможность анаморфозы, но и дает саму анаморфозу.

В случае $P(z)=\text{const}$ все прямые преобразованного абака будут прямыми. В этом случае очевидно равенство

$$\frac{\partial^2\ lg\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x\ \partial y}=0.$$

Последовательно интегрируя последнее равенство сначала по x, а затем по y, находим:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\ lg\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]=f_2(y),$$

$$lg\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\int f_2(y)\ dy+f_1(x),$$

где $f_1(x)$, $f_2(y)$ - произвольные функции. Отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = a^{\int f_1(x)dx} \cdot a^{\int f_2(y)dy},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если уравнение $f(x,y,z)=0$ не удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = a^{\int f_1(x)dx} \cdot a^{\int f_2(y)dy},$$

то оно может допускать единственную анаморфозу.

Из теоремы 1 следует, что если уравнение $f(x,y,z)=0$ допускает анаморфозу, то имеет место равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = M(x)\ N(y)\ P(z)$$

и сама анаморфоза представляется равенствами

$$\bar{x} = \int M(x)\,dx + C_1;\ \bar{y} = \int \frac{dy}{N(y)}.$$

Допустим, что существует другая анаморфоза $\bar{x} = \varphi(x)$; $\bar{y} = \psi(y)$. Тогда из первой теоремы мы должны иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = -\varphi'(x) \cdot \frac{1}{\psi'(y)} \cdot R_1(z).$$

Следовательно, $M(x)N(y)P(z) = -\varphi'(x) \cdot \dfrac{1}{\psi'(y)} \cdot R_1(z)$. Последнее можно представить в форме

$$\frac{P(z)}{R(z)} = -\frac{\varphi'(x)}{M(x)} \cdot \frac{1}{N(y)\,\psi'(y)}.$$

Это устанавливает зависимость между x,y,z. Но такой зависимостью x,y,z связаны заданным уравнением $f(x,y,z)=0$ и никакой другой зависимости быть не может. Следовательно, обе анаморфозы эквивалентны. Полагая в последнем равенстве

$$\frac{P(z)}{R(z)} = Z(z),\quad \frac{-\varphi'(x)}{M(x)} = X(x),\quad \frac{1}{N(y)\,\psi'(y)} = Y(y),$$

уравнение $f(x,y,z)=0$ может быть представлено в виде $Z(z)=X(x)=Y(y)$. Это уравнение удовлетворяет условиям первой теоремы, в чем можно убедиться непосредственной проверкой:

$$f=XY-Z;\quad \frac{\partial f}{\partial x}=X'Y;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=XY';\quad \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=\frac{X'}{X}\cdot\frac{Y}{Y'};$$

$$lg\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}\right)=lg\frac{X'}{X}+lg\frac{Y}{Y'};$$

$$\frac{\partial^2\, lg\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Отсюда следует, что если условие теоремы 2 не выполнено, то уравнение $f(x,y,z)=0$ допускает только одну анаморфозу.

Теорема 3. Если уравнение $f(x,y,z)=0$ удовлетворяет условию второй теоремы, то она допускает бесчисленное множество анаморфоз.

Для доказательства продифференцируем уравнение $f(x,y,z)=0$, считая x, y - функцией, а z - постоянной. Из двух имеющихся равенств

$$f(x,y,z)=0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$$

исключим параметр. С одной стороны, $\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}=-y'$. С другой стороны, $\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}=\omega_1(x)\,\omega_2(y)$. Отсюда получается искомое дифференциальное уравнение семейства $y'=-\omega_1(x)\,\omega_2(y)$. Интегрируя это уравнение, имеем $\int(\omega_2(y))^{-1}dy=-\int\omega_1(x)\,dx+C$. Полагая $\int(\omega_2(y))^{-1}dy=F_2(y)$, $\int\omega_1(x)\,dx=F_1(x)$, имеем $F_1(x)+F_2(y)=C$. Положим $C=F_3(z)$. Тогда $F_1(x)+F_2(y)=F_3(z)$. Можно представить $F_1(x)=lgX(x)$, $F_2(y)=lg\,Y(y)$, $F_3(z)=lgZ(z)$. Тогда имеем $X(x)\cdot Y(y)=Z(z)$. Уравнения такого типа удовлетворяют условиям второй теоремы. Покажем, что абак такого уравнения допускает бесчисленное множество анаморфоз.

Составим отношение $\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{X'(x)\,Y(y)}{X(x)\,Y'(y)}$.

Его можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{X'(x)}{X^{n+1}(x)} \cdot \frac{Y(y)\, X^n(x)}{Y'(y)} =$$

$$= \frac{X'(x)}{X^{n+1}(x)} \cdot \frac{Y(y)}{Y'(y)} \cdot \frac{Z^n(z)}{Y^n(y)} = \frac{X'(x)}{X^{n+1}(x)} \cdot \frac{Z^n(x)}{Y^{n-1}(y)\, Y'(y)},$$

где n - произвольное число.

Формулы анаморфозы в данном случае следующие:

$$\bar{x} = \int \frac{X'(x)}{X^{n+1}(x)} dx = -\frac{1}{n\, X^n(x)} + \alpha,$$

$$\bar{y} = \int Y^{n-1}(y)\, Y'(y)\, dy = \frac{Y^n(y)}{n} + \beta.$$

Постоянные α и β вызывают лишь параллельный перенос абака в плоскости (x,y). Выбор числа "n" определяет характер самой анаморфозы. Давая n различные значения,получаем бесчисленное множество анаморфоз, выпрямляющих абак данного уравнения.

Если уравнение $f(x,y,z)=0$ не удовлетворяет приведенным теоремам, то целесообразно применение нелинейной анаморфозы, после которой данное уравнение должно изображаться номограммой в виде семейства концентрических окружностей, софокальных эллипсов и других линий, простых в построении.

Для представления семейства кривых декартова абака в виде концентрических окружностей уравнение $f(x,y,z)=0$ после анаморфозы должно иметь вид $X^2(x)+Y^2(y)=f^2(z)$, т.е. первоначальное уравнение $f(x,y,z)=0$ должно иметь форму $\varphi^2(x)+\psi^2(y)-f^2(z)=0$.

Часто в этой форме оно записано быть не может,но может принять эту форму после различных тождественных преобразований.

Очевидно, что для квадратической формы

$$div\ (k\ grad\ f) = R(z).$$

Учитывая, что кривизна окружности $\dfrac{|\bar{y}''|}{(1+\bar{y}'^2)^{3/2}} = F(z)$,

векторное поле $\dfrac{d\vec{\tau}}{dS} = \dfrac{\bar{y}''(\bar{y}'\vec{i} + \vec{j})}{(1+\bar{y}'^2)^2}$, где $\vec{\tau}$ - поле касательных векторов, S - естественная параметризация, а также дифференцируя два раза исходное уравнение и уравнение анаморфозы имеем:

Теорема 4. Для того, чтобы уравнение $f(x,y,z)=0$ допускало нелинейную круговую анаморфозу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial f^2 / \partial x^2}{\partial f^2 / \partial y^2} = -\varphi'^2(x)\,\psi'^2(y)\,f^2(z).$$

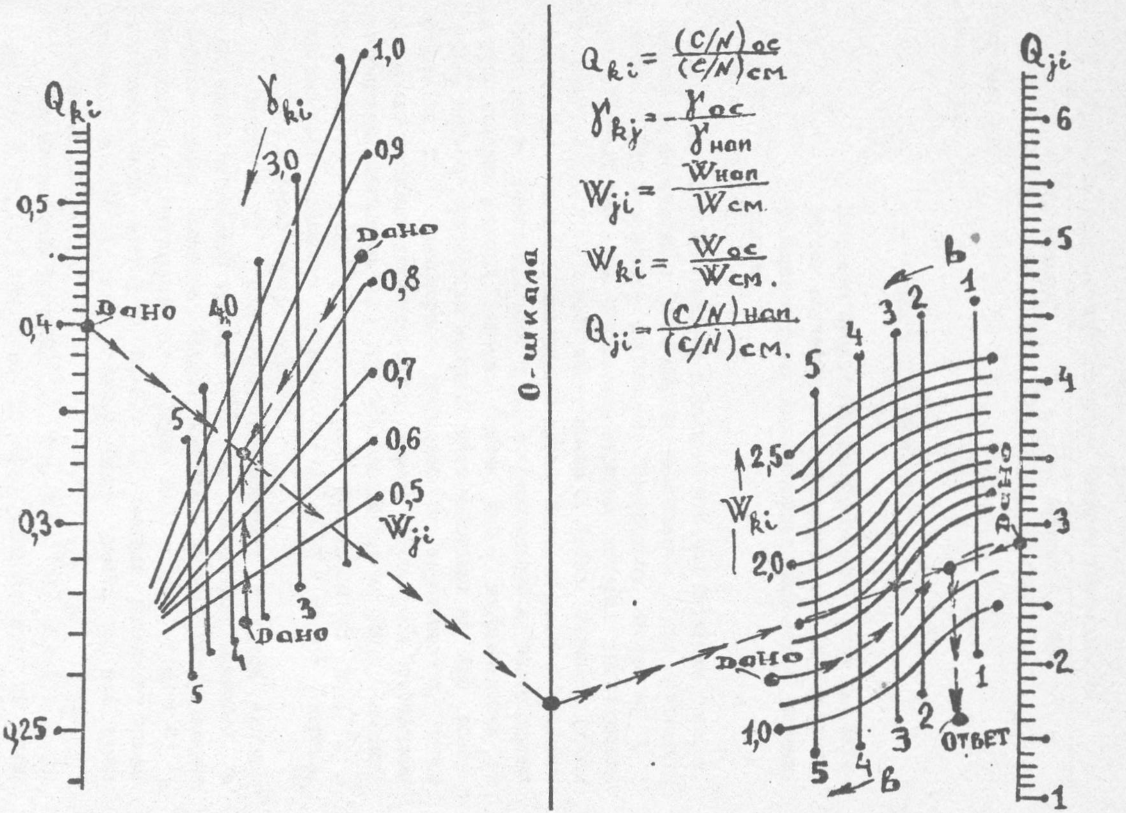
Доказательство ввиду громоздкости опускаем.

Результаты работы использованы при разработке номограммы (рис.1) для расчета нейтрализации и обезвреживания сточных вод отходами лесопромышленного комплекса по формулам:

$$\begin{cases} b = \dfrac{2P}{(K^2-4LM)^{1/2} - N}; \\[2ex] P = W_k\,\gamma_k\left(1-\dfrac{W_i}{W_k}\cdot\dfrac{Q_k}{Q_i}\right); \quad L = W_k\,\gamma_k\left(1-\dfrac{W_k}{W_i}\cdot\dfrac{Q_k}{Q_i}\right); \\[2ex] M = W_j\,\gamma_j\left(1-\dfrac{W_i}{W_j}\cdot\dfrac{\gamma_k}{\gamma_j}\cdot\dfrac{Q_k}{Q_i}-\dfrac{W_i}{W_j}\cdot\dfrac{Q_j}{Q_i}\right); \\[2ex] N = W_j\,\gamma_k\left(1-\dfrac{W_k}{W_j}\cdot\dfrac{\gamma_j}{\gamma_k}+\dfrac{W_i}{W_j}\cdot\dfrac{\gamma_j}{\gamma_k}\cdot\dfrac{Q_j}{Q_i}\right); \\[2ex] K = W_j\,\gamma_k\left(1-\dfrac{W_i}{W_j}\cdot\dfrac{\gamma_j}{\gamma_k}\cdot\dfrac{Q_j}{Q_i}+\dfrac{W_k}{W_j}\cdot\dfrac{\gamma_j}{\gamma_k}\right). \end{cases}$$

Ключ к пользованию номограммой представлен на рисунке стрелками. Ответ получается после двукратного приложения линейки. Левая бинарная шкала номограммы построена с применением линейной анаморфозы, правая – нелинейной комбинированной анаморфозы.

Номограмма проста в пользовании и позволяет решать ряд задач, в том числе и обратных.



$$Q_{ki}=\frac{(C/N)_{oc}}{(C/N)_{см}}$$

$$\gamma_{kj}=\frac{\gamma_{oc}}{\gamma_{нап}}$$

$$W_{ji}=\frac{W_{нап}}{W_{см}}$$

$$W_{ki}=\frac{W_{oc}}{W_{см}}.$$

$$Q_{ji}=\frac{(C/N)_{нап}}{(C/N)_{см}}.$$