Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.986
Платонов С.С.

О ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ИНВАРИАНТНЫМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть T и τ - представления группы Ли G в топологических векторных пространствах. Получена теорема, дающая достаточные условия для того, чтобы можно было установить взаимно однозначное соответствие между замкнутыми T-инвариантными и τ-инвариантными подпространствами.

В качестве примеров применения теоремы рассмотрены случаи, когда T и τ - квазирегулярные представления группы G в некоторых конкретных функциональных топологических векторных пространствах, используемых в гармоническом анализе на группах Ли.

Пусть G - произвольная группа Ли, $T(g)$ и $\tau(g)$ - представления группы G в полных локально выпуклых пространствах (ЛВП) V и $V_\circ$ соответственно (представления групп Ли всегда предполагаются непрерывными). Линейное пространство $H\subseteq V$ (или $H\subseteq V_\circ$) будем называть инвариантным подпространством (сокращенно ИПП), если H замкнуто и инвариантно относительно представления $T(g)$ (соотв. $\tau(g)$). В некоторых случаях удается установить взаимно однозначное соответствие между ИПП в V и $V_\circ$, что позволяет свести задачу описания инвариантных подпространств в V к описанию ИПП в $V_\circ$.

Наиболее важен для гармонического анализа на группах Ли следующий случай (см.[1,с.134]): пусть группа G транзитивно действует на гладком многообразии M, V и $V_\circ$- топологические векторные пространства, состоящие из функций на M (все функции предполагаются комплекснозначными), T и τ - ограничения на V и V_0 квазирегулярного представления $\pi(g)$, где

$$\pi(g):\ f(x)\to f(g^{-1}x),\ x\in M,\ g\in G.$$

В настоящей работе получены некоторые достаточные условия для того, чтобы между ИПП в V и V_0 можно было установить взаимно однозначное соответствие. В качестве приложения этих результатов установлено взаимно однозначное соответствие между ИПП в некоторых функциональных пространствах, которые часто используются в различных задачах гармонического анализа.

Пусть G - произвольная группа Ли. Через $C_c(G)$ и $C_c^\infty(G)$ обозначим множества всех непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций на группе G с компактным носителем. Относительно свертки

$$\varphi_1*\varphi_2(g)=\int\varphi_1(gh^{-1})\varphi_2(h)dh \qquad (1)$$

(dh -элемент меры Хаара на группе G, интегралы всюду берутся по всему пространству с мерой, если не указана область интегрирования) $C_c(G)$ и $C_c^\infty(G)$ являются ассоциативными алгебрами. Любое представление T группы G в полном ЛВП V индуцирует действие алгебры $C_c(G)$ в пространстве V:

$$\varphi*v=\int\varphi(g)\mathrm{T}(g^{-1})v\ dg \quad \forall\varphi\in C_c(G),\ \forall v\in V; \qquad (2)$$

интеграл в (2) можно понимать как интеграл Римана от функции со значениями в ЛВП V.

Теорема 1. Пусть T и τ -представления группы G в полных ЛВП V и V_0 соответственно, и пусть выполняются следующие условия:

1) $V_0\subseteq V$, и это вложение непрерывно;

2) $\mathrm{T}(g)|_{V_0}=\tau(g)\ \forall g\in G$;

3) $\forall v\in V$, $\forall\varphi\in C_c^\infty(G)$ вектор $\varphi*v\in V_0$ и отображение $v\to\varphi*v$ из V в V_0 непрерывно.

Тогда между инвариантными подпространствами в V и V_0 существует взаимно однозначное соответствие, которое получается сопоставлением ИПП $H_0\subseteq V_0$ его замыкания $H=[H_0]$ в V. То же соответствие получается, если сопоставить ИПП $H\subseteq V$ подпространство $H_0=H\cap V_0\subseteq V_0$.

Доказательство. Выберем на группе G последовательность функций $\varphi_n(g)\in C_c^\infty$, удовлетворяющую условиям: (1) $\varphi_n(g)>0$; (2) $\int\varphi_n(g)dg=1$; (3) носители $\mathrm{supp}(\varphi_n)$, начиная с некоторого номера, попадают в любую, сколь угодно малую окрестность единицы группы G. Такую последовательность функций будем называть δ-образной. Стандартное рассуждение показывает, что $\varphi_n * v \to v$ при $n \to \infty$ в пространстве V, а при $v \in V_o$ и в пространстве V_o.

Если H - замкнутое инвариантное подпространство в V, то $H \cap V_o$ будет инвариантным подпространством в V_o. Если $v \in H$, то векторы $\varphi_n * v \in H_o$ и, следовательно, H_o плотно в H. В результате получаем, что отображение $H_o \to [H_o]$ сюръективно.

Теперь пусть H_o - произвольное ИПП в V_o, $H=[H_o]$. Проверим, что $H \cap V_o = H_o$. Пусть $v \in H \cap V_o$. Тогда $v_\alpha \to v$ в пространстве V для некоторой направленности $v_\alpha \in H_o$. Из свойства (3) следует, что $\varphi_n * v_\alpha \to \varphi_n * v$ в пространстве V_o для любого фиксированного n. Так как $\varphi_n * v_\alpha \in H_o$ и H_o замкнуто в V_o, то $\varphi_n * v \in V_o$. Но $\varphi_n * v \to v$ при $n \to \infty$ в пространстве V_o, следовательно, и $v \in H_o$. Окончательно получаем, что отображения $H_o \to H = [H_o]$ и $H \to H_o = H \cap V_o$ являются взаимно обратными и устанавливают взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами в V_o и V.

Пусть группа Ли G транзитивно действует на многообразии M. Через $C=C^0$, C^d $(d=1,2,\dots)$ и C^∞ будем обозначать пространства всех непрерывных, d-раз непрерывно дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых функций с обычными топологиями. В качестве пространства V возьмем пространство C^d $(d=0,1,2,\dots,\infty)$. Пусть $T(g): f(x) \to f(g^{-1}x)$ - квазирегулярное представление группы G в пространстве C^d. Пусть $V_o = \mathcal{E}$ и $\tau(g) = T(g)|_{\mathcal{E}}$. Легко видеть, что в этом случае выполняются условия теоремы 1. Следовательно, ИПП в C^d и ε находятся во взаимно однозначном соответствии. В частности, получаем, что описание ИПП в C^d не зависит от d $(d=0,1,2,\dots,\infty)$.

Другие классы функциональных пространств будут состоять из функций экспоненциального роста в некотором смысле, который нуждается в уточнении.

Пусть M - риманово многообразие, G - транзитивная группа Ли преобразований пространства M, причем все преобразования группы G являются изометриями пространства M. Пусть O - фиксированная точка пространства M. Для $x \in M$ через $|x|$ обозначим расстояние от точки x до фиксированной точки O. Пусть K - стационарная подгруппа точки O. Для $x \in G$ определим "норму" $|g| = |gO|$. Тогда очевидно, что при $x\in M$, $g\in G$

$$|ux|=|x|,\ |u|=0\quad \forall u\in K; \tag{3}$$

$$|u_1 g u_2|=|g|\quad \forall u_1,u_2\in K; \tag{4}$$

$$|gx|\leqslant|g|+|x|,\quad |g^{-1}x|\geqslant|x|-|g|,\quad |g^{-1}|=|g|. \tag{5}$$

$$|g_1 g_2|\leqslant|g_1|+|g_2|\quad \forall g_1,g_2\in G.$$

Через L_k^p ($p\geqslant 1$) обозначим множество всех измеримых функций $f(x)$ на M, для которых

$$N_{p,k}(f)=\left(\int|f(x)|^p e^{-k|x|}dx\right)^{1/p}<\infty, \tag{6}$$

где dx - элемент римановой меры на многообразии M, интеграл берется по пространству M. При этом в функциональных пространствах, не состоящих из непрерывных функций, функции берутся с точностью до значений на множестве меры нуль. Пространство L_k^p является банаховым пространством (БП) относительно нормы $N_{p,k}$. Пространство

$$L_*^p=\cup_{k>0} L_k^p$$

снабдим топологией индуктивного предела БП L_k^p.

Отметим, что если $f(x)\in L_k^p$, то $f(gx)\in L_k^p$ для любого $g\in G$. Действительно,

$$N_{p,k}(f(gx))=(\int|f(gx)|^p e^{-k|x|}dx)^{1/p}=(\int|f(y)|^p e^{-k|g^{-1}y|}dy)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant e^{(k/p)|g|}N_{p,k}(f). \tag{7}$$

При этом была сделана замена $gx=y$, использованы инвариантность меры и (5).

Обозначим через C_k пространство непрерывных функций $f(x)$ на M, для которых $|f(x)|e^{-k|x|}\to 0$ при $|x|\to\infty$. Пространство C_k является БП относительно нормы

$$N_k(f)=\sup_{x\in M}|f(x)|e^{-k|x|}.$$

Пространство

$$C_*=\cup_{k>0} C_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП C_k.

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли группы G. Для $X\in\mathfrak{g}$ и любой функции $f(x)$

пусть

$$(Xf)(x)=\frac{d}{dt}f(exp(tX)x)\Big|_{t=0}. \tag{8}$$

Выберем какой-нибудь базис $X_1,\dots X_m$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Через C_k^d ($d\in\mathbb{Z}_+$) обозначим множество d-раз непрерывно дифференцируемых функций таких, что

$$X_{l_1}\dots X_{l_r}f\in C_k$$

для любых векторов $X_{l_1},\dots X_{l_r}$ ($0\leqslant r\leqslant d$) из базиса алгебры $\mathfrak{g}$. C_k^d является банаховым пространством с нормой

$$N_{k,d}^*(f)=\sum N_k(X_{l_1}\dots X_{l_r}f),$$

где суммирование происходит по всевозможным наборам $(l_1,\dots l_r)$ ($0\leqslant r\leqslant d$, каждый индекс в наборе пробегает значения от 1 до m). В частности, $C_k^0=C_k$.

Пусть

$$C_k^\infty=\bigcap_{d=1}^{\infty}C_k^d.$$

Топология в C_k^∞ порождается системой норм $N_{k,d}^*$, и C_k^∞ становится локально выпуклым пространством.

Пространство

$$C_*^d=\bigcup_{k>0}C_k^d\quad(0\leqslant d\leqslant\infty)$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП C_k^d.

Докажем, что пространства L_*^p и C_*^d удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть B_r-замкнутый шар радиуса r на многообразии M с центром в точке O, $v(B_r)$ -его объем.

Лемма 1. Для некоторых чисел $C,d>0$ справедливо неравенство

$$v(B_r)\leqslant Cd^r.$$

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству леммы 1 из работы [2]. Известно, что любое однородное риманово многообразие является полным [3, с.117] и, следовательно, по теореме Хопфа-Ринова, шар B_r компактен и любая пара точек $a,b\in M$ может быть соединена кривой длины $\rho(a,b)$, где $\rho(a,b)$ - расстояние от a до b.

Для любого $g\in G$ множество gB_r является шаром радиуса r с центром в точке gO. Так как шар B_r компактен, то найдется конечное множество $A_1=\{g_1,\dots g_d\}\subset G$ такое, что

$$\bigcup_{i=1}^{d} g_i B_1 \supseteq B_2 .$$

Можно считать, что единица $e\in A_1$. Пусть множество A_n состоит из всевозможных произведений $g_{i_1}\ldots g_{i_n}$, где каждый множитель $g_{i_k}\in A_1$. Индукцией по n проверим, что

$$\bigcup_{g\in A_n} gB_1 \supseteq B_{n+1} .$$

Для $n=1$ включение справедливо. Пусть $x\in B_{n+1}$. Соединим точки O и x кривой длины $|x|$ и на этой кривой найдем точку y, для которой $|y|\leqslant n$ и $\rho(x,y)\leqslant 1$. По предположению индукции $y=hz$, $h\in A_{n-1}$, $z\in B_1$. Из инвариантности расстояния следует, что $\rho(y,x)=\rho(z,h^{-1}x)\leqslant 1$, следовательно, $h^{-1}\in B_2$ и $h^{-1}x=g_i w$, $w\in B_1$. Окончательно $x=hg_i w$.

Так как множество A_n содержит не более чем d^n элементов, то $v(B_n) \leqslant d^n v(B_1)$. Если $[r]$ - целая часть числа r, то

$$v(B_r)\leqslant v(B_{[r]+1})\leqslant d^{[r]}v(B_1)\leqslant v(B_1)d^r .$$

Следствие 1. При $k>\ln(d)$ интеграл

$$\int_M e^{-k|x|}dx$$

конечен.

Действительно,

$$\int_M e^{-k|x|}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n\setminus B_{n-1}} e^{-k|x|}dx,$$

а последний ряд сходится, так как

$$\int_{B_n\setminus B_{n-1}} e^{-k|x|}dx\leqslant e^{-k(n-1)}\, v(B_n)\leqslant e^{-k(n-1)}Cd^n=Ce^k e^{-n(k-\ln(d))}.$$

Лемма 2. $C_*\subseteq L^p_*$, причем это вложение непрерывно.

Доказательство. Пусть $f(x)\in C_k$ и $m>\ln(d)$. Тогда

$$N_{p,pk+m}(f)=\left(\int|f(x)|^p\, e^{-(k+m)|x|}dx\right)^{1\setminus p}\leqslant N_k(f)\left(\int e^{-m|x|}dx\right)^{1\setminus p}\leqslant CN_k(f).$$

Следовательно, $f\in L^p_{kp+m}$ и вложение $C\subset L^p_{kp+m}$ непрерывно.

Для любой функции $\varphi(g)$ на группе G и $X\in\mathfrak{G}$ пусть

$$(L(X)\varphi)(g)=\frac{d}{dt}\varphi(exp(tX)g)|_{t=0}.$$

Всюду в дальнейших формулах dg - элемент меры Хаара на группе G.

Лемма 3. Если $f\in L^p_*$ (или $f\in C^d_*$), $\varphi\in C^\infty_c(G)$, то $\varphi*f\in C^\infty_*$. Отображение $f\to\varphi*f$ из L^p_* (или из C^d_*) в C^∞_* непрерывно.

Доказательство. Предварительно заметим, что из единственности (с точностью до множителя) инвариантной меры на M следует, что для некоторого числа $A>0$

$$\int_G f(g^{-1}x)dg=A\int_M f(x)dx.$$

Пусть $f\in L^p_k$, $p>1$. Пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$|\varphi*f(x)|=|\int\varphi(g)e^{(k/p)|g^{-1}x|}\, f(g^{-1}x)e^{-(k/p)|g^{-1}x|}\, dg|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int|f(g^{-1}x)|^p\, e^{-k|g^{-1}x|}dg\right)^{1/p}\cdot\left(\int|\varphi(g)|^q\, e^{(kq/p)|g^{-1}x|}dg\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant A^{1/p}\, N_{p,k}(f)\, e^{(k/p)|x|}\cdot\left(|\varphi(g)|^q\, e^{(kp/q)|g|}dg\right)^{1/q},$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Следовательно,

$$|\varphi*f(x)|\leqslant C\, N_{p,k}(f)\, exp(\frac{k}{p}|x|),$$

где C не зависит от f. Из этого неравенства следует, что $\varphi*f\in C_{r/p}$ при $r>k$ и непрерывно зависит от f. Так как

$$X(\varphi*f)=(L(X)\varphi)*f \quad (X\in\mathfrak{g}),$$

то $\varphi*f\in C^\infty_{r/p}$ и непрерывно зависит от f.

Случаи $p=1$ и $f\in C^d_*$ рассматриваются аналогично.

Из теоремы 1 и леммы 3 сразу получаем следующее

Следствие 2. Между инвариантными подпространствами в L^p_* и C^d_* ($d\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$) существует взаимно однозначное соответствие, построенное как в теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представления групп Ли. М.:Наука, 1983.
2. Гординг Л. Аналитические векторы в представлениях групп Ли // Математика. 1965. 9:5. С.78-94.
3. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.:Наука, 1982.