Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.54

Старков В.В.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЛОКАЛЬНО КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

Рассматриваются классы $H(\alpha,K)$ гармонических в $\Delta=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ ($h(z)$ и $g(z)$ - регуляры в Δ), сохраняющих ориентацию ($J_f(z)>0$), K-квазиконформных в Δ, причем $f(0)=0$, $h'(0)+\overline{g'(0)}=1$, $\dfrac{h(z)}{h'(0)}$ из U_α ($\alpha \geqslant 1$) - универсального линейно-инвариантного семейства функций. Расширяющиеся с ростом $\alpha\in[1,\infty]$ и $K\in[1,\infty]$ классы $H(\alpha,K)$ охватывают все сохраняющие ориентацию гармонические функции с указанной нормировкой. В статье рассмотрен случай конечных α и K. При $K=1$ приведенные результаты совпадают с известными результатами Х.Поммеренке в U_α.

Будем рассматривать комплекснозначные гармонические в круге $\Delta=\{z:|z|<1\}$ функции $f(z)=u+iv$, т.е. вещественные функции $\underline{u}$ и $\underline{v}$ должны быть гармоническими в Δ . В 80-е годы стала активно развиваться теория однолистных и локально однолистных гармонических в Δ функций. При этом в основу определения и изучения классов таких гармонических функций,по аналогии с регулярными в Δ функциями, закладывалась обычно геометрическая характеристика функций исследуемого класса (выпуклость, почти

---

[1] Настоящая статья представляет собой краткое изложение результатов. Полный текст статьи будет опубликован в 1994 г. в журнале "Annales UMCS".

выпуклость, звездообразность, однолистность, симметричность относительно вещественной оси образа $f(\Delta)$ единичного круга). В основу изучающихся в этой статье классов функций положены свойства локальной квазиконформности и линейной инвариантности рассматриваемых гармонических функций.

Х.Поммеренке [1] определял линейно-инвариантное семейство порядка α ($\alpha \geqslant 1$) как множество $\mathfrak{M}$ регулярных в Δ функций $\varphi(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty} d_n(\varphi)$, удовлетворяющих условиям :

а) $\varphi'(z) \neq 0$ в Δ (локальная однолистность),

б) для любого конформного автоморфизма $e^{i\theta}\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ единичного круга Δ и любой функции $\varphi(z) \in \mathfrak{M}$

$$\frac{\varphi\left(e^{i\theta}\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)-\varphi(e^{i\theta}a)}{\varphi'(e^{i\theta}a)\,e^{i\theta}\,(1-|a|^2)} = z+\ldots \in \mathfrak{M}$$

(инвариантность относительно преобразований Мебиуса),

в) порядок семейства $\mathfrak{M}$ $\sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{M}}|d_2(\varphi)| = \sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{M}}\dfrac{|\varphi''(0)|}{2} = \alpha$.

Универсальным линейно-инвариантным семейством U_α порядка α Х.Поммеренке называл объединение всех линейно-инвариантных семейств порядка не выше α.

Ясно, что U_α, $\alpha\in[1,+\infty]$, содержат все конформные отображения $\varphi(z)$ круга Δ.

В случае регулярных функций многие известные классы однолистных и локально однолистных функций являются линейно-инвариантными семействами и поэтому обладают рядом общих свойств, зависящих только от порядка α этих семейств (эти свойства основаны на инвариантности таких семейств относительно преобразований Мебиуса). С другой стороны, введение универсальных линейно-инвариантных семейств U_α позволило с общих позиций (линейной инвариантности) изучать свойства всех локально однолистных в Δ функций конечного порядка.

В этой статье осуществлен перенос некоторых идей, связанных с определением и изучением U_α , на гармонические в Δ функции. Такие функции можно представить в виде

$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=+1}^{\infty} \overline{a_{-n}(f)}\, z^n \qquad (1)$$

- регулярные в Δ функции. Причем будем рассматривать только функции (1), сохраняющие ориентацию в Δ, т.е. якобиан

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0 \quad \text{в } \Delta. \qquad (2)$$

Таким образом, речь идет только о локально гомеоморфных функциях вида (1).

Определение. Если для функции $f(z)$ вида (1) существует K=const такое, что

$$\frac{|f'_z| + |f'_{\bar z}|}{|f'_z| - |f'_{\bar z}|} = \frac{|h'_z| + |h'_{\bar z}|}{|h'_z| - |h'_{\bar z}|} \leqslant K = \frac{1+k}{1-k} \quad \text{в } \Delta, \text{ то}$$

будем называть $f(z)$ локально K-квазиконформной в Δ.

Определение. Обозначим $H(\alpha,K)$ множество всех локально K-квазиконформных гармонических в Δ функций $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ с нормировкой $a_0(f)=0$, $a_1(f) + a_{-1}(f) = 1$ и таких, что $\dfrac{h'(z)}{h'(0)} \in U_\alpha$.

Расширяющиеся с ростом α и $K\in[1,\infty]$ классы $H(\alpha,K)$ охватывают все сохраняющие ориентацию гармонические в Δ функции $f(z)$ с указанной в последнем определении нормировкой.

В дальнейшем при изучении классов $H(\alpha,K)$ ограничимся случаем конечных α и K.

Теорема 1. При любых $\alpha \in [1,\infty]$, $K \in [1,\infty]$ $H(\alpha,K)$ образуют секвенциально компактные семейства относительно равномерной сходимости внутри Δ.

В $H(\alpha,K)$ справедливы точные неравенства:

$$\frac{1}{1+k} \leqslant |a_1(f)| \leqslant \frac{1}{1-k}, \quad |a_{-1}(f)| \leqslant \frac{k}{1-k}.$$

Далее будем обозначать производную комплекснозначной функции $f(z)$ по направлению вектора $e^{i\theta}$ через

$$\frac{\partial f(z)}{\partial e^{i\theta}} \left(= \lim_{\rho \to +0} \frac{f(z+\rho e^{i\theta}) - f(z)}{\rho} \right).$$

Очевидно, для регулярной функции $h(z)$ имеем: $\dfrac{\partial h(z)}{\partial e^{i\theta}} = h'(z)e^{i\theta}$; и для гармонических функций вида (1):

$$\frac{\partial f(z)}{\partial e^{i\theta}} = h'(z)\, e^{i\theta} + \overline{g'(z)}\, e^{-i\theta} =$$

$$= f'_z(z)\, e^{i\theta} + f'_{\bar z}(z)\, e^{-i\theta}.$$

По аналогии с определением линейно-инвариантного семейства регулярных функций дадим

Определение. Семейство $\mathfrak{R}$ гармонических в круге Δ функций будем называть линейно-инвариантным семейством гармонических функций, если для каждой $f \in \mathfrak{R}$

а) выполнено (2);

б) $a_0(f) = 0,\ a_1(f) + a_{-1}(f) = 1;$ (3)

в) для любых $a \in \Delta$ и $\theta \in [0,2\pi]$ функция

$$f_\theta(z,a) = \frac{f\left(e^{i\theta}\ \dfrac{z+a}{1+\bar a z}\right) - f(e^{i\theta} a)}{(1-|a|^2)\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial e^{i\theta}}(e^{i\theta} a)} \in \mathfrak{R}.$$

Отметим, что некоторые из изучавшихся разными авторами классов гармонических функций являются при нормировке (3) линейно-инвариантными семействами. Примерами таких классов являются: K_H - класс гармонических функций, однолистно отображающих Δ на выпуклую область; C_H - класс близких к выпуклым гармонических функций (т.е. дополнение к $f(\Delta)$, $f \in C_H$, является объединением некоторого множества непересекающихся лучей); S_H - класс однолистных гармонических функций. Эти классы впервые введены в [2], в дальнейшем рассматривались многими авторами. Линейную инвариантность класса S_H и некоторых его подклассов использовал для изучения этих классов Шейл-Смолл [3] (при этом нормировка изучавшихся классов отличалась от (3) тем, что $a_1(f) = 1$ вместо $a_1(f) + a_{-1}(f) = 1$). Он же заметил, что поведение функции $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in S_H$ во многом зависит от порядка (в смысле Х.Поммеренке) функции $\dfrac{h'(z)}{h'(0)}$. Это же наблюдается и в случае семейств $H(\alpha,K)$. Несложно показать, что семейства $H(\alpha,K)$ являются линейно-инвариантными; $H(\alpha,1) = U_\alpha$.

Теорема 2 (искажения). Для каждой
$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in H(\alpha,K)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{K}\ \frac{(1-|z|)^{\alpha-1}}{(1+|z|)^{\alpha+1}} \leqslant \left|\frac{\partial f(z)}{\partial\, e^{i\theta}}\right| \leqslant K\ \frac{(1+|z|)^{\alpha-1}}{(1-|z|)^{\alpha+1}}\ . \qquad (4)$$

Равенство в (4) достигается при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Причем если $z=re^{i\varphi}$, то равенство справа получим при

$$h(z)=\frac{e^{i\varphi}}{2\alpha(1-k)}\left[\left(\frac{1+z\,e^{-i\varphi}}{1-z\,e^{-i\varphi}}\right)^{\alpha}-1\right],\qquad g(z)=-k\,h(z);$$

равенство слева получим при

$$h(z)=\frac{e^{i\varphi}}{2\alpha(1+k)}\left[\left(\frac{1-z\,e^{-i\varphi}}{1+z\,e^{-i\varphi}}\right)^{\alpha}-1\right],\qquad g(z)=k\,h(z).$$

При $K=1$ из (4) получаем известную [1] оценку $|\varphi'(z)|$ для $\varphi\in U_\alpha$. Можно дать и более тонкую оценку $\left|\frac{\partial f(z)}{\partial\, e^{i\theta}}\right|$ в зависимости от $|h'(z)|$ и $\arg h'(z)$.

Следствие 1. Пусть $f\in H(\alpha,K)$; $z_1, z_2\in\Delta$. Тогда для любых вещественных θ и γ

$$(\alpha-1)\ ln\left(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|\right)-(\alpha+1)\ ln\left(1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|\right)-ln\,K\leqslant$$

$$\leqslant\ ln\left|\frac{\partial f(z_1)}{\partial\, e^{i\gamma}}\right|-ln\left|\frac{\partial f(z_1)}{\partial\, e^{i\theta}}\right|-2ln\left[\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_1\overline{z_2}|}\right]\leqslant$$

$$\leqslant(\alpha-1)\ ln\left(1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|\right)-(\alpha+1)ln\left(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|\right)+ln\,K,$$

причем для любых $z_1,\ z_2\in\Delta$ существуют вещественные θ и γ и существует $f\in H(\alpha,K)$, при которых слева (справа) в последнем неравенстве можно поставить знак равенства.

Следствие 2. Пусть $f\in H(\alpha,K)$, $re^{i\varphi}\in\Delta$. Тогда для производной по r от $f(z)=f(re^{i\varphi})$ имеет место точная оценка

$$\frac{1}{K}\ \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}}\leqslant\left|f'_r\ (re^{i\varphi})\right|\leqslant K\,\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

с равенством слева и справа при $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ для соответственно указанных в теореме 2 функций.

Обозначим $F=F_f=f(\Delta)$ двумерное гладкое многообразие – однолистный образ круга Δ при локально гомеоморфном отображении

$f\in H(\alpha,K)$. Пусть $w_1, w_2 \in F$, Γ - кривая, соединяющая w_1 и w_2 в F. Обозначим $diam\ \Gamma$ диаметр проекции кривой Γ на комплексную плоскость, $l(\Gamma)$- длину проекции Γ на комплексную плоскость (в предположении, что длина существует).

Обозначим $d(w_1,w_2) = d_F(w_1,w_2) = \inf diam\ \Gamma$,

$$l(w_1,w_2) = l_F(w_1,w_2) = \inf l\ (\Gamma),$$

где нижняя граница берется по всем кривым $\Gamma \in F$, связывающим w_1 и w_2. Очевидно,

$$|w_1-w_2| \leqslant d(w_1,w_2) \leqslant l\ (w_1,w_2)\ .$$

Теорема 3. Пусть $f\in H(\alpha,K)$, $r\in(0,1)$. Многообразие с краем $F(r)=\{f(z):|z|\leqslant r\}$ содержит однолистный круг с центром в 0 и радиусом $\frac{1}{2\alpha K}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]$, но не всегда бо́льшим.

Областью Кебе семейства $H(\alpha,K)$ назовем максимальную однолистную область, содержащуюся в пересечении многообразий $\bigcap\limits_{f\in H(\alpha,K)} F_f$.

Следствие 3. Область Кебе семейства $H(\alpha,K)$ содержит круг с центром в 0 и радиусом $\frac{1}{2\alpha K}$, но не больший.

Заметим, что область Кебе семейства $H(\alpha,K)$ содержится в конечной области, ограниченной кривой

$$\gamma(\varphi)= - \frac{e^{i\varphi} + k\ e^{-i\varphi}}{2\alpha(1+k)},\quad \varphi\in[0,2\pi].$$

Теорема 4. Для любой $f\in H(\alpha,K)$ справедливо точное неравенство

$$\frac{1}{2\alpha K}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \leqslant d(0,f(z)) \leqslant l(0,f(z))\leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right],$$

в правой части этого неравенства знак равенства для $d(0,f(z))$ и $l(0,f(z))$ достигается для функции

$$f(z)= \frac{\pm i}{2\alpha(1-k)}\left\{\left[\left(\frac{1\mp zi}{1\pm zi}\right)^{\alpha}-1\right]+k\left[\overline{\left(\frac{1\mp zi}{1\pm zi}\right)^{\alpha}-1}\right]\right\} \tag{5}$$

при $z=\pm ri$; в левой части - для функции $f(z)= h(z)+k\overline{h(z)}$,

$$h(z)= \frac{\pm i}{2\alpha(1+k)}\left[\left(\frac{1\pm zi}{1\mp zi}\right)^{\alpha}-1\right] \text{ при } z=\pm ri.$$

Следствие 4. Для любой $f\in H(\alpha,K)$ $\Rightarrow$

$$|f(z)|\leqslant \frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}-1\right]$$

с равенством при $z=\pm i|z|$ для функции (5).

Следствие 5. Для любых $a,b\in\Delta$ и любого вещественного θ

$$\frac{1}{2\alpha K}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]\leqslant\frac{d_F(f(a\,e^{i\theta}),f(b))}{(1-|a|^2)\left|\frac{\partial f}{\partial e^{i\theta}}(a\,e^{i\theta})\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{l_F(f(a\,e^{i\theta}),f(b))}{(1-|a|^2)\left|\frac{\partial f}{\partial e^{i\theta}}(a\,e^{i\theta})\right|}\leqslant\frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right],$$

где $r=\left|\dfrac{a\,e^{i\theta}-b}{\bar a\,b-e^{i\theta}}\right|$.

Неравенство точное в том смысле, что для любого $a\in\Delta$ и вещественного θ для левой и правой частей неравенства существуют свои $b\in\Delta$ и $f\in H(\alpha,K)$, при которых эта часть неравенства обращается в равенство. В этом смысле точным является также неравенство

$$\frac{|f(a\,e^{i\theta})-f(b)|}{(1-|a|^2)\left|\frac{\partial f}{\partial e^{i\theta}}(a\,e^{i\theta})\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{|\bar a\,b-e^{i\theta}|+|a\,e^{i\theta}-b|}{|\bar a\,b-e^{i\theta}|-|a\,e^{i\theta}-b|}\right)^{\alpha}-1\right].$$

Теорема 5 (вращения). Пусть $f\in H(\alpha,K)$, $z\in\Delta$, $\theta\in[-\pi,+\pi]$. Тогда

$$\left|Arg\frac{\partial f}{\partial e^{i\theta}}(z)\right|\leqslant|\theta|+2\arcsin k+2\arcsin\frac{|z|}{\alpha}+$$

$$+\sqrt{\alpha^2-1}\,\ln\frac{\sqrt{1-\frac{|z|^2}{\alpha^2}}+|z|\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}}{\sqrt{1-\frac{|z|^2}{\alpha^2}}-|z|\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}}$$

(здесь $Arg\dfrac{\partial f(0)}{\partial 1}=0$, $Arg\dfrac{\partial f(z)}{\partial e^{i\theta}}$ непрерывно меняется при непрерывном изменении z и θ).

Здесь, как и в предыдущих результатах, при $k=0$ ($K=1$) получаем известный результат Х.Поммеренке [1] в U_α.

По аналогии с определением Х.Поммеренке порядка линейно-инвариантного семейства регулярных функций дадим

Определение. Порядком линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$ гармонических функций называется число

$$\operatorname{ord} \mathfrak{M} = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \frac{1}{2}\left(\left|f''_{z}(0) + f''_{\bar z}(0)\right|\right) =$$

$$= \sup_{f\in\mathfrak{M}} |a_2(f) + a_{-2}(f)|.$$

Теорема 6. $\operatorname{ord} H(\alpha,K) = \alpha K$.

Следствие 6. Для любой $f\in H(\alpha,K)$ и любого вещественного θ

$$\left|\frac{f''_{e^{i\theta}}(z)}{f'_{e^{i\theta}}(z)}\right| \leqslant \frac{2K(\alpha+|z|)}{1-|z|^2} \qquad \left(\text{здесь } f'_{e^{i\theta}} = \frac{\partial f}{\partial e^{i\theta}}\right);$$

неравенство точное и достигается для функции

$$f(z)= h(z) + k\,\overline{h(z)}\,, \quad h(z) = \frac{1}{2\alpha(1+k)}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right],$$

при $z=r$, $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

В частности, справедливо точное неравенство

$$\left|\frac{f''_{r^2}(re^{i\theta})}{f'_{r}(re^{i\theta})}\right| \leqslant 2\,\frac{\alpha K+r}{1-r^2}.$$

Приведенные в этой статье оценки справедливы для K-квазиконформных функций из K_H при $\alpha=2$ и из C_H при $\alpha=3$ (при условии нормировки (3) в этих классах). Но в случае этих конкретных классов остается открытым вопрос о точности полученных оценок.

Не все известные в U_α результаты имеют свои аналоги в $H(\alpha,K)$. Так, для любого $\varphi\in U_\alpha$ и любого $\theta\in[0,2\pi]$

$|\varphi'(re^{i\theta})|\,\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ убывает по $r\in[0,1)$ (см. [4]). Но в $H(\alpha,K)$ нет аналога этого утверждения для $f'_r(z)$.

Так, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in H(\alpha,K)$ при

$$h(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right], \quad g'(z) = kzh'(z)\,e^{i\theta};$$

однако $|f_r'(r)|\,\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} = |1+kre^{-i\theta}|$ не является монотонной по r функцией на некотором множестве значений θ. Однако можно утверждать, что для почти всех θ существует предел

$$\lim_{r\to 1-0} |f_r'(re^{i\theta})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} = \delta_\theta \in [0,K],$$

если $f \in H(\alpha,K)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pommerenke Ch. Linear - invariante Familien analytischer Funktionen.I// Math. Ann., 1964. 155. P.108-154.
2. Clunie J., Sheil-Small T. Harmonic univalent functions // Ann.Acad. Sci.Fenn., Ser.A.I.Math., 1984. V.9. P.3-25.
3. Sheil-Small T. Constants for planar harmonic mappings // J. London Math. Soc. (2), 1990. 42. P.237-248.
4. Старков В.В. Теоремы регулярности в универсальных линейно-инвариантных семействах функций // Сердика (Болгарский мат. журн.). 1985. Т. 11. С.299-318.