Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Степанова Е.Н.

О ПРОСТРАНСТВЕ ЧАСТИЧНЫХ СЕЛЕКЦИЙ

Рассмотренные в этой работе пространства являются обобщением пространств решений дифференциальных уравнений (преимущественно с непрерывной правой частью), которые исследованы В.В. Филипповым. Мы же рассматриваем их с чисто топологической точки зрения.

Для топологического пространства Y рассмотрим пространство $expY$ всех его непустых замкнутых подмножеств с топологией Виеториса. Множество подпространств пространства $expY$ обозначим через $L\ expY$.

Пусть $N \subseteq Y$, $Z \subseteq expY$. Положим

$$Z_N=\{K\colon K \in Z,\ K \subseteq N\}.$$

Для множеств $K \subseteq Y$ и $V \subseteq expY$ определим

$$O\{K,V\}=\{Z\colon Z \in L\ expY,\ Z_K \subseteq V\}.$$

Будем рассматривать $L\ expY$ в качестве топологического пространства с предбазой, состоящей из всех множеств вида $O\{K,V\}$, где K пробегает множество $exp_c Y$ всех компактных подмножеств пространства Y, а V - множество всех открытых подмножеств пространства $expY$.

Пространство $L\ expY$ не является хаусдорфовым: если $Z_0 \subseteq Z_1$ - различные его элементы, то любая окрестность точки Z_1 содержит точку Z_0.

Будем говорить, что обобщенная последовательность $\{Z_\alpha\colon \alpha \in A\} \subseteq expY$ сходится в Y к пространству $Z \subseteq expY$, если

$$(*)\ \left\{\begin{array}{l}\text{для любого компакта } K \subseteq Y \text{ и любой обобщенной последова-}\\ \text{тельности элементов } F_\beta \in (Z_{\alpha_\beta})_K,\ \ \alpha_{\beta'} < \alpha_{\beta''} \text{ при } \beta' < \beta'',\\ \text{найдутся элемент } F \in Z \text{ и подпоследовательность последо-}\\ \text{вательности } \{F_\beta\}, \text{ сходящаяся к } F.\end{array}\right.$$

Обозначим через LC $expY$ множество всех пространств $Z \subseteq expY$, удовлетворяющих условию: для любого компакта $K \subseteq Y$ множество Z_K компактно. Множество LC $expY$ несет индуцированную из пространства L $expY$ топологию.

Предложение. Пусть пространство Y нормально,

$\{Z_n : n=0,1,2,\dots\} \subset L\ expY$, $Z_n \longrightarrow Z_0$,

$\{K_n : n=0,1,2,\dots\} \subset exp_c Y$, $K_n \longrightarrow K_0$, $n \longrightarrow \infty$.

Тогда $(Z_n)_{K_n} \longrightarrow (Z_0)_{K_0}$.

Теорема 1. Если Y – локально компактное пространство веса τ и $Z \in$ LC $expY$, то точка Z пространства L $expY$ обладает базой мощности τ.

Доказательство. I. Зафиксируем базу γ мощности τ пространства Y. Множество γ_0 тех ее элементов, замыкания которых компактны, также имеет мощность τ и составляет базу. Мощность множества γ_1 всех конечных подмножеств множества γ_0 также равна τ. Таким образом, семейство

$$\text{æ}=\{[\ \cup \xi\ ] : \xi \in \gamma_1\}$$

состоит из компактов, лежащих в Y, и $|\text{æ}|=\tau$.

Известно, что для T_1-пространства вес его экспоненты совпадает с весом самого пространства, поэтому $w(expY)=\tau$. Для каждого замкнутого множества $F \subseteq expY$ зафиксируем базу $\{W_\alpha F : \alpha \in \Sigma\}$, $|\Sigma|=\tau$, (на самом деле, здесь можно было ограничиться базами только для компактов F в $expY$) и рассмотрим семейство

$$\delta=\{O\{K, W_\alpha Z_K\} : K \in \text{æ},\ \alpha \in \Sigma\}.$$

Очевидно, $|\delta|=\tau$.

II. Выберем произвольно $K \in exp_c Y$ и открытое подмножество V пространства $expY$, содержащее множество Z_K.

Зафиксируем базу $\mathcal{B}$ компакта K в Y: $\mathcal{B}=\{U_\beta : \beta \in S\}$, направленную по включению. Для множества $U_1 \in \mathcal{B}$ и каждой точки $x \in K$ найдем элемент $G_1(x)$ базы γ_0, удовлетворяющий условию: $x \in G_1(x) \subseteq U_1$. Из открытого покрытия $\{G_1(x) : x \in K\}$ компакта K выделим конечное подпокрытие, объединение элементов которого обозначим O_1K.

Для каждого индекса $\beta \in S$, $\beta \neq 1$, и любой точки $x \in K$ зафиксируем элемент $G_\beta(x)$ базы γ_0 с условием: $x \in G_\beta(x) \subseteq U_\beta \cap O,K$. И вновь из покрытия $\{G_\beta(x): x \in K\}$ выделим конечное подпокрытие, объединение его элементов обозначим $O_\beta K$.

Покажем, что $Z_{[O_{\beta_0} K]} \subseteq V$ при некотором $\beta_0 \in S$. Семейство $\{Z_{[O_\beta K]}: \beta \in S\}$ является центрированным и лежит в компакте $Z_{[O,K]}$. Поэтому семейство $\{Z_{[O_\beta K]} \setminus V: \beta \in S\}$ тоже центрировано и в компакте $Z_{[O,K]}$ должно иметь непустое пересечение при условии, что все элементы этого семейства непусты. Но очевидно, что

$$\cap \left\{Z_{[O_\beta K]} \setminus V: \beta \in S\right\} = \emptyset.$$

Следовательно, существует $\beta_0 \in S$, для которого $Z_{[O_{\beta_0} K]} \subseteq V$. Тогда найдется такой индекс $\alpha \in \Sigma$, что $Z_{[O_{\beta_0} K]} \subseteq W_\alpha Z_{[O_{\beta_0} K]} \subseteq V$ и поэтому

$$O\left\{[O_{\beta_0} K], W_\alpha Z_{[O_{\beta_0} K]}\right\} \subseteq O\left\{[O_{\beta_0} K], V\right\} \subseteq O\{K, V\}.$$

Но множество слева принадлежит δ, следовательно, это включение в силу произвола выбора K и V означает, что семейство δ составляет предбазу в точке Z.

Лемма. Обобщенная последовательность $\{Z_\alpha: \alpha \in A\} \subseteq L\ exp Y$ тогда и только тогда сходится к точке $Z \in LC\ exp Y$ в пространстве $L\ exp Y$, когда она сходится к Z в Y в смысле определения с условием (*).

Из теоремы 1 и леммы следует

Теорема 2. Если точка $Z \in LC\ exp Y$ принадлежит замыканию множества $M \subseteq L\ exp Y$ в пространстве $L\ exp Y$, то найдется обобщенная последовательность мощности, равной весу пространства Y, элементов множества M, сходящаяся в Y к пространству Z. И обратно: если для точки $Z \in LC\ exp Y$ существует обобщенная последовательность элементов множества $M \subseteq L\ exp Y$, сходящаяся в Y к пространству Z, то точка Z принадлежит замыканию множества M в пространстве $L\ exp Y$.

Теперь перейдем к описанию пространства частичных селекций. Для топологических пространств X и Y зафиксируем некоторое непрерывное отображение π пространства Y на пространство X, то есть $\pi: Y \longrightarrow X$. *Частичной селекцией* отображения π назовем непрерывное отображение $\varphi: A \longrightarrow Y$ замкнутого подмножества A пространства X в пространство Y, удовлетворяющее условию: $\pi(\varphi(a))=a$ для любого элемента $a\in A$. Через $CS(Y,\pi)$ обозначим множество всех таких частичных селекций (происхождение символов CS заключено в словах *continue selection*).

Отображение

$$Im : CS(Y,\pi) \longrightarrow expY,$$

ставящее в соответствие каждой частичной селекции φ из $CS(Y,\pi)$ образ $\varphi(A)$, где A - область определения φ, инъективно. Множество $Im(CS(Y,\pi))$ является подмножеством множества $expY$, где определена топология Виеториса. Считая отображение

$$Im : CS(Y,\pi) \longrightarrow Im(CS(Y,\pi))$$

гомеоморфизмом, можно однозначно определить топологию на $CS(Y,\pi)$.

Наряду с $CS(Y,\pi)$ рассмотрим его подпространство $CS_c(Y,\pi)$, состоящее из тех частичных селекций, области определения которых являются бикомпактами.

Теорема 3. Пусть пространство Y метризуемо. Тогда множество $Im(CS_c(Y,\pi))$ является G_δ-множеством пространства $expY$.

Доказательство. Пусть ρ - некоторая метрика на пространстве Y. Отнесем к множеству H_n все те бикомпактные множества M пространства Y, которые удовлетворяют условию: найдутся такие точки $y_1, y_2\in M$, что $\pi(y_1)=\pi(y_2)$ и $\rho(y_1,y_2)>\frac{1}{n}$. Тогда в наших обозначениях получим:

$$Im\ (CS_c(Y,\pi))= exp_cY \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [H_n].$$

Идея доказательства этого равенства следует доказательству теоремы 9.1.12 из [1].

Замечание. Если Y - метризуемое пространство, то пространство exp_cY метризуемо метрикой Хаусдорфа, следовательно, метризуемо $CS_c(Y,\pi)$.

В дальнейшем полагаем Y метризуемым. Для $K \subseteq Y$, $c \in]0,\infty[\cup \{\infty\}$ и $Z_1, Z_2 \in L\ exp_cY$ положим

$$m(Z_1,Z_2;\ K,c)=inf(\{c\} \cup \{\varepsilon:\ \varepsilon>0,\ (Z_2)_K \subseteq O((Z_1)_K,\varepsilon)\}).$$

Утверждение 1. Пусть $K \subseteq Y$, $c \in]0,\infty[\cup \{\infty\}$ и $X,Z,P \in L\ exp_c Y$. Тогда

1) $m(X,Z;K,c) \geqslant 0$,
2) $m(X,X;K,c) = 0$,
3) $m(X,Z;K,c) \leqslant m(X,P;K,c) + m(P,Z;K,c)$,
4) если $Z \subseteq X$, то найдется такой компакт $L \subseteq Y$, что $m(X,Z;L,c)>0$.

Пусть Y – метризуемое локально компактное пространство счетного веса и $æ=\{K_j : j=1,2,\dots\}$ – семейство, построенное в доказательстве теоремы 1. Для любых $X,Z \in L\ exp_c Y$ положим

$$m(X,Z)=\sum_{j=1}^{\infty} m(X,Z;K_j,2^{-j}).$$

Утверждение 2. Пусть $X,Z,P \in L\ exp_c Y$. Тогда

1) $m(X,Z) \geqslant 0$,
2) $m(X,Z) = 0 \Leftrightarrow Z \subseteq X$,
3) $m(X,Z) \leqslant m(X,P) + m(P,Z)$.

Утверждение 3. Пусть $\{Z_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subseteq L\ exp_c Y$, $Z \in LC\ exp_c Y$. Следующие условия эквивалентны:

1) последовательность $\{Z_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ сходится в Y к пространству Z;
2) для любого компакта $K \subseteq Y$ и любого $c \in]0,\infty[\cup \{\infty\}$

$$\lim \{ m(Z,Z_\alpha;K,c) : \alpha \in \mathcal{A}\}=0;$$

3) для любого компакта $K \in æ$ и любого $c \in]0,\infty[\cup \{\infty\}$

$$\lim \{m(Z,Z_\alpha;K,c) : \alpha \in \mathcal{A}\}=0;$$

4) $\lim \{m(Z,Z_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}=0$.

Следующая теорема характеризует топологию пространства $LC\ exp_c Y$.

Теорема 4. Пусть $U \subseteq LC\ exp_c Y$. Множество U открыто тогда и только тогда, когда для любого $Z \in U$ найдется такое число $\varepsilon>0$, что $\{X : m(Z,X)<\varepsilon\} \subseteq U$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть U открыто в $LC\ exp_c Y$. Тогда можно полагать: $U=O\{K,V\}$, где K – компакт в Y, V – открытое подмножество пространства $exp_c Y$.

Зафиксируем $Z \in U$. Поскольку Z_K – замкнуто, V – открыто, то существует такое число $\varepsilon>0$, что $O_H(Z_K,\varepsilon)\subseteq V$, где $O_H(Z_K,\varepsilon)$- окрестность множества Z_K в $exp_c Y$ относительно метрики Хаусдорфа. Теперь покажем, что найдется $\delta>0$: $Z_{[O_\rho(K,\delta)]}\subseteq O_H(Z_K,\frac{\varepsilon}{2})$.

Здесь $O_\rho(K,\delta)$ - δ-окрестность компакта K в метрическом пространстве (Y,ρ). Допустим противное. Семейство

$$\mathcal{B}=\{O_\rho(K,2^{-i}): i=1,2,\dots\}\ -$$

база компакта K в Y. Семейство $\{Z_{[O_\rho(K,2^{-i})]}: i=1,2,\dots\}$ является центрированным и лежит в компакте $Z_{[O_\rho(K,\frac{1}{2})]}$ (множество $[O_\rho(K,\frac{1}{2})]$ можно считать компактом, в противном случае повторим алгоритм построения множества O,K из доказательства теоремы 1, пункт II и получим нужный компакт). Семейство

$$\{Z_{[O_\rho(K,2^{-i})]}\setminus O_H(Z_K,\frac{\varepsilon}{2}): i=1,2,\dots\}$$

тоже должно быть центрированным и иметь в компакте $Z_{[O_\rho(K,\frac{1}{2})]}$ непустое пересечение при условии,что все элементы этого семейства непусты. Но очевидно,

$$\cap\{Z_{[O_\rho(K,2^{-i})]}\setminus O_H(Z_K,\frac{\varepsilon}{2}): i=1,2,\dots\}=\varnothing,$$

т.е. существует такой номер n, что

$$Z_{[O_\rho(K,2^{-n})]}\subseteq O_H(Z_K,\frac{\varepsilon}{2}).$$

Построим покрытие $\mathcal{A}$ компакта K элементами базы γ_0 из теоремы 1, выполняя при этом условие: для любого множества $Q\in\mathcal{A}$ выполнено $Q\subseteq O_\rho(K,2^{-n})$. Из покрытия $\mathcal{A}$ выделим конечное подпокрытие, объединение элементов этого покрытия лежит в семействе γ_1, а замыкание P этого объединения является элементом семейства $\varkappa$: $K\subseteq P=K_m\in\varkappa$, причем $K_m\subseteq[O_\rho(K,2^{-n})]$. Положим $\varepsilon_0=min\{\frac{\varepsilon}{2},2^{-m-1}\}$ и покажем, что $\{X: m(Z,X)<\varepsilon_0\}\subseteq U=O\{K,V\}$. Очевидно, что для этого достаточно доказать импликацию: $m(Z,X)<\varepsilon_0\Rightarrow X_k\subseteq V$. Имеем:

$$\varepsilon_0>m(Z,X)=\sum_{j=1}^{\infty}m(Z,X;K_j,2^{-j})>m(Z,X;K_m,2^{-m}).$$

Из оценки $m(Z,X;K_m,2^{-m})<\varepsilon_0\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}<\frac{1}{2^m}$ получаем $X_{K_m}\subseteq O_H(Z_{K_m},\varepsilon_0)$. И в итоге:

$$X_K \subseteq X_{K_m} \subseteq O_H(Z_{K_m}, \varepsilon_o) \subseteq O_H(Z_{[O_p(K,2^{-n})]}, \varepsilon_o) \subseteq$$

$$\subseteq O_H(O_H(Z_K, \frac{\varepsilon}{2}), \varepsilon_o) \subseteq O_H(Z_K, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = O_H(Z_K, \varepsilon) \subseteq V.$$

Достаточность. Пусть для любого $Z \in U$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\{X: m(Z,X) < \varepsilon\} \subseteq U$. Покажем, что тогда U – открыто.

Пусть $\varepsilon > \frac{1}{2^m}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим открытое в LC $exp_c Y$ множество W, содержащее точку Z:

$$W = \bigcap_{j=1}^{m+1} O\{K_j, O(Z_{K_j}, \frac{\varepsilon}{2(m+1)})\},$$

и покажем, что оно лежит в U.

Для всякого $X \in W$ выполнены неравенства:

$$m(Z,X;K_j,2^{-j}) < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}, \quad j=1,2,\dots,m+1.$$

Поэтому

$$m(Z,X) = \sum_{j=1}^{\infty} m(Z,X;K_j,2^{-j}) < \frac{\varepsilon}{2(m+1)} \cdot (m+1) + \sum_{j=m+2}^{\infty} 2^{-j} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $X \in W$ верно $m(Z.X) < \varepsilon$. а по условию это означает, что $X \in U$.

Утверждение 4. Если подпространство пространства LC $exp_c Y$ есть T_1-пространство, то оно метризуемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.