Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Стреколовская Н.С.

О РЕТРАКТЕ ЭКСПОНЕНТЫ $\exp_2 X$ БИКОМПАКТА X

В работе доказывается теорема "Бикомпакт X является ретрактом экспоненты $\exp_2 X$ ".

Приведем определения. На множестве непустых замкнутых множеств пространства X рассматривается топология Виеториса, базу которой образуют множества вида

$$O\langle U_1,\dots,U_n\rangle = \{F\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F\cap U_1 \neq \varnothing,\ F\cap U_2 \neq \varnothing,\ \dots,\ F\cap U_n \neq \varnothing\},$$

где $U_1,\dots,U_n$ открыты в X. Это топологическое пространство называется экспонентой $\exp X$. При этом пространство X естественно вкладывается в экспоненту $\exp_2 X$, $X \subset \exp_2 X$. Отображение вложения $j:X \to \exp_2 X$ определяется формулой $j(x)=\{x\}$ для любой точки $x\in X$.

Множество из всех непустых замкнутых множеств пространства X мощности, не превосходящей кардинального числа k, называется $\exp_k X$. При любом k имеет место включение $\exp_k X \subset \exp X$ и можно рассматривать $\exp_k X$ в качестве подпространства пространства $\exp X$ (см. [1]).

Пусть X – бикомпакт. Рассмотрим на декартовом произведении $X\times X$ отношение эквивалентности: точка $(x,y)\sim(y,x)$. Так, заданное отношение эквивалентности задает разбиение R на произведении бикомпактов $X\times X$. Тривиальными элементами разбиения R являются точки вида (x,x). Фактор-пространство по разбиению R обозначим $X\times X/_R$, факторное отображение $\pi:X\times X \to X\times X/_R$.

Лемма . Экспонента бикомпакта X $\exp_2 X$ гомеоморфна пространству $X\times X/_R$.

Доказательство леммы. Определим отображение $i:\exp_2 X \to X\times X/_R$. $i\{x\}=(x,x)$, если x - одноточечное множество в X, $i\{(x,y)\}=\{(x,y)\}$ для двухточечного множества. Отображение i, очевидно, взаимно однозначно. Покажем, что i - гомеоморфизм. Проверим непрерывность отображения i. Пусть Ot - произвольная окрестность точки $t=(x,y)$ в пространстве $X\times X/_R$, $x\neq y$, $x,y \in X$. В ней содержится окрестность вида $Ox\times Oy$, где Ox,Oy - открытые дизъюнктные окрестности точек x и y в бикомпакте X. Тогда $i(O\langle Ox,Oy\rangle) \subset Ox\times Oy \subset Ot$. Для точки $t=(x,x)$ в окрестности Ot возьмем окрестность $O't$, такую, что $\pi^{-1}O't = Ox\times Ox$, $O't \leq Ot$, где Ox - окрестность точки x в бикомпакте X. Тогда $i(O\langle Ox\rangle)\subset O't \subset Ot$. Непрерывность отображения i доказана.

Проверим непрерывность обратного отображения i^{-1}.
Пусть $O\langle W_1,W_2\rangle$ - произвольная базисная окрестность точки $t=(x,y)$, $x\neq y$ в $\exp_2 X$. Берем дизъюнктные окрестности Ox,Oy в бикомпакте X, чтобы $O\langle Ox,Oy\rangle \subset O\langle W_1,W_2\rangle$. Если точка $t=(x,x)$, то в любой базисной окрестности $O\langle W\rangle\ni t$ найдется окрестность $O't$, такая, что $\pi^{-1}O't \subset W\times W$. Ясно, что $i^{-1}(O't) \subset O\langle W\rangle$.
Итак, экспонента $\exp_2 X$ гомеоморфна пространству $X\times X/_R$ ($\exp_2 X \approx X\times X/_R$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Считаем $\exp_2 X \equiv X\times X/_R$ с помощью гомеоморфизма i, бикомпакт X подпространством $X\times X/_R$, состоящем из точек вида (x,x), $x \in X$ ($\Delta = \{(x,x),\ x\in X\}$).Построим ретракцию $r\colon X\times X/_R\to \Delta$. Пусть $F = (\{x\}\times X) \cup (X\times\{x\})$ в пространстве $X\times X$. Положим $r(\pi F) = (x,x)$, где π - факторное отображение. Докажем, что отображение r - непрерывно. В самом деле, базисные окрестности точки (x,x) в пространстве $X\times X/_R$ образуют множества вида $U = Ox\times Ox/_R$, где Ox - окрестность точки x в X.
Покажем, что множество $\tau^{-1}(U \cap \Delta)$ открыто. Рассмотрим множество $\pi^{-1}r^{-1}(U \cap \Delta) = (Ox\times X) \cup (X\times Ox)$. Множество $(Ox\times X) \cup (X\times Ox)$ открыто в $X\times X$, следовательно, множество $r^{-1}(U \cap \Delta)$ открыто по определению факторной топологии, что и требовалось доказать.

В работе [2] поставлен следующий вопрос: если $\exp_2 X$ - AR-компакт, будет ли X - AR-компактом?
Поскольку ретракт абсолютного ретракта является абсолютным

ретрактом, получаем с помощью теоремы положительный ответ на вопрос.

Следствие. Если exp_2X - абсолютный ретракт, то бикомпакт X - абсолютный ретракт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Шапиро Л.Б. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа// IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Тирасполь, 1979.